EL DESARROLLO DEL ALGEBRA MODERNA

Parte II: El álgebra de las ecuaciones

Guillermo Dávila Rascón

…Dado que este arte sobrepasa todo ingenio humano y la perspicacia de todo talento mortal y es un verdadero regalo celestial y una prueba clara de la capacidad de las mentes de los hombres, quien sea que se aplique a él creerá que no existe nada que no pueda entender.

G. Cardano[1]

EL ÁLGEBRA EN LA INDIA

Mencionábamos en la primera parte de este trabajo que un aspecto muy importante en el desarrollo del álgebra es la Teoría de Ecuaciones y, entre otras cosas, citábamos la opinión de J. A. Serret al respecto, para quien *el álgebra es, propiamente hablando, el análisis de las ecuaciones* [8, p.1]. En esta ocasión tendremos oportunidad de abundar más sobre este tema y podremos apreciar su significación para el álgebra. Inclusive, es posible decir que ha sido una etapa crucial de su desarrollo.

El período histórico que ahora nos interesa estudiar desde la perspectiva del desarrollo del álgebra, abarca desde aproximadamente el año 650 hasta alrededor de 1750. En este lapso surgieron las condiciones que permitieron darle al álgebra un estatus independiente dentro de las matemáticas y se desarrolló una notación adecuada, lo cual preparó el camino para el advenimiento del álgebra simbólica y propició el desarrollo del álgebra moderna, tal y como se le concibe actualmente.

Después del declinar de la matemática griega, los nuevos centros de aprendizaje matemático se localizarían en la India y en el mundo Árabe, que para ese tiempo (siglo VII), estaba en plena etapa de expansión. Si, en el clímax de la matemática griega, Alejandría fue durante mucho tiempo el centro del saber, en el caso de las matemáticas árabes, Bagdad se convirtió en la ciudad cosmopolita que daría cabida a los hombres de ciencia, sin que importara su origen étnico ni su religión; sobre esto abundaremos un poco más en la siguiente sección.

Por otra parte, las matemáticas en India no llegaron a desarrollarse como lo hicieron en la cultura árabe; sin embargo, es conveniente resaltar algunos de sus logros. Entre los más notables está su sistema de numeración, del cual proviene el que usamos actualmente y que fue importante para el surgimiento de un álgebra de tipo aritmético en la cultura hindú. Es muy difícil determinar si la evolución de las matemáticas en la India se dio de forma independiente, pues hay muchos indicios que sugieren influencias de Egipto, de Babilonia y de Grecia. Además de esto, no se han podido establecer con precisión las fechas en las que

[1] Ver [7], p. 8.

fueron escritos algunos de los tratados matemáticos que aún se conservan, lo que hace más difícil una evaluación de sus aportaciones.

No obstante lo anterior, es posible darnos una idea más o menos fidedigna de algunos de sus logros. Por ejemplo, los textos conocidos como los *Siddhāntas*, escritos en verso hacia el final del siglo IV y principios del V, son tratados que comprenden cuestiones astronómicas en los que están presentes algunos conceptos de trigonometría plana y esférica; es de hacer notar que las reglas de cálculo involucradas en estos textos se presentan con explicaciones muy breves y no se dan demostraciones de los métodos usados. Además, de acuerdo con varios historiadores occidentales, se puede observar una clara influencia griega pues la trigonometría y astronomía involucradas son muy similares a lo propuesto por Ptolomeo en el siglo II. Sin embargo, en los *Siddhāntas* se introduce por primera vez en las matemáticas lo que ahora llamamos el *seno* de un ángulo y que según Boyer, es la principal contribución de estos tratados a la historia de las matemáticas [1, p. 209].

Mención aparte debemos hacer del *Aryabhatiya*, tratado escrito en verso por Aryabhata en 499. El contenido de esta obra es una síntesis de conocimientos previos relacionados con reglas de cálculo usadas en astronomía y en las matemáticas necesarias para tomar medidas (*v.g*. cálculo de áreas). Es oportuno señalar que el autor muestra poco interés en seguir una metodología lógica y no se preocupa por averiguar la veracidad de los métodos usados. De hecho, varias de las reglas expuestas sobre las matemáticas de las mediciones son incorrectas, lo que nos muestra muy poca preocupación por demostrar estas reglas en contraste con las matemáticas griegas.

Por ejemplo, la fórmula que se da para calcular el área de un triángulo es correcta: la mitad del producto de la base por la altura; sin embargo, la fórmula para el volumen de una pirámide se presenta como lo análogo en el espacio del caso anterior: la mitad del producto del área de la base por la altura, lo cual es incorrecto.

Otro ejemplo donde se aprecia esa falta de rigor a la que hemos hecho referencia es el siguiente: el área un trapezoide se calcula correctamente como la mitad del producto de la suma de las longitudes de los lados paralelos por la longitud de la perpendicular entre ellos. Pero luego se hace una afirmación muy extraña donde se dice que para calcular el área de cualquier figura plana se deben determinar las longitudes de dos de sus lados y el área buscada es el producto de ellas.

Por otra parte, para darnos una idea de lo florido del lenguaje que usa Aryabhata en su texto, presentamos el siguiente ejemplo: *En la regla de tres, multiplica la fruta por el deseo y divide por la medida. El resultado será la fruta del deseo*. Notemos que si en la ecuación $ax = bc$, donde a es la *medida*, b es la *fruta* y c el *deseo*, entonces la *fruta del deseo* sería x y en el procedimiento anterior se establece que $x = \frac{bc}{a}$.

Es importante recalcar que a pesar de sus fallas, el *Aryabhatiya* es un trabajo de gran significado para las matemáticas pues en él podemos encontrar referencias a un sistema de numeración posicional de base 10: "*De lugar en lugar cada uno es diez veces el anterior*", nos dice Aryabhata en su texto, y aquí encontramos los primeros usos de un sistema de numeración que se distingue de cualquier otro por los siguientes tres aspectos: (1) su base es decimal, es decir, se cuenta por medio de potencias de diez; (2) el principio de numeración es posicional, lo cual significa que el valor de un numeral depende de la posición, y (3) el uso de un símbolo especial para cada uno de los diez numerales, los cuales evolucionaron en occidente hasta convertirse en 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9 y 0. Aquí es necesario observar que el símbolo hindú para el cero se introdujo mucho tiempo después que los otros numerales, como veremos más adelante.

Debemos señalar que ninguna de las tres características anteriores es de origen hindú. Por ejemplo, los egipcios y los griegos usaban sistemas de numeración de base diez aunque no eran posicionales; ya hemos visto, en la primera parte, que los babilonios usaban un sistema posicional de base 60, y, con respecto al punto (3), en la matemática griega también encontramos símbolos especiales para los primeros diez dígitos. Sin embargo, parece ser que fue en India donde por primera vez se fusionaron los tres aspectos ya mencionados, lo que dio origen a nuestro sistema de numeración.

En los *Siddhāntas* y en el *Aryabhatiya* encontramos ciertos elementos de trigonometría que son una herramienta importante en astronomía. Si bien el gran matemático y astrónomo griego Ptolomeo, quien vivió aproximadamente del año 85 al 165 de nuestra era, introdujo algunos conceptos trigonométricos y elaboró tablas trigonométricas para sus estudios astronómicos, estos se basaban en la relación entre las cuerdas de un círculo y los ángulos centrales que estas subtienden. En cambio, en India se estudió la correspondencia entre la mitad de una cuerda de un círculo y la mitad del ángulo que subtiende al centro la cuerda total; esta relación funcional es la precursora de lo que ahora conocemos como la función seno de un ángulo.

Por otra parte, la geometría parece no haber interesado mucho a los matemáticos hindúes pues les bastaban las reglas elementales usadas en sus mediciones y, como nos dice Boyer, "*En vez de eso, a los matemáticos hindúes les fascinaba trabajar con los números, ya sea que este trabajo involucrara las operaciones aritméticas ordinarias o la solución de ecuaciones determinadas e indeterminadas*" [1, p.216]. Así, los métodos que usaban para sumar y multiplicar eran similares a los que usamos actualmente. Más aún, desarrollaron un método para la división de enteros positivos que llegó a Italia a través de los árabes. No es posible establecer fechas específicas para este evento, aunque ya en 1202 el método fue usado por Fibonacci (1170-1250) y se extendió su uso por toda Europa hasta que fue sustituido definitivamente durante el siglo XVII por el método que usamos actualmente, el cual tiene sus orígenes en el siglo XV.

Una contribución importante de las matemáticas hindúes al álgebra tuvo lugar con Brahmagupta (598-670). Su obra más significativa, el *Brahmasphuta Siddhānta* es un texto sobre trigonometría, geometría y álgebra, y al igual que en los trabajos que le precedieron, se mezclan resultados correctos con otros que son incorrectos. Sin embargo, los que tienen que ver propiamente con álgebra son mucho más importantes que las fórmulas para calcular áreas, y Brahmagupta da soluciones generales para ecuaciones cuadráticas e incluso considera el caso de soluciones negativas. Más aún, este es el primer texto antiguo en donde se da un tratamiento sistemático de la aritmética con números negativos.

Recordemos que en la primera parte mencionamos que Diofanto en su *Aritmética* concluye que "*más por menos es menos*" y "*menos por menos es más*" por medio del análisis de expresiones del tipo $(a-b)(c-d)=ac-ad-bc+bd$, para números naturales a,b,c,d, donde $a>b$ y $c>d$; sin embargo, en el caso de las matemáticas en India, estas fórmulas se convierten en verdaderas reglas aritméticas y en el *Brahmasputa* encontramos que:

"*Positivo dividido por positivo, o negativo por negativo, es afirmativo. Cifra dividida por cifra es cero. Positivo dividido por negativo es negativo. Negativo dividido por afirmativo es negativo. Positivo o negativo dividido por cero es una fracción con eso por denominador*." [1, p. 220].

Con respecto a la división por cero, presente en el párrafo anterior, es necesario abundar un poco más, y para ello diremos algunas palabras sobre el origen del cero, aunque es imposible decir con certeza cuándo y dónde surgió éste. Primeramente es necesario recordar (ver parte I), que la Mesopotamia fue cuna de una civilización matemáticamente avanzada y desarrollaron un sistema de numeración posicional de base 60. Durante miles de años no tuvieron un símbolo para denotar el cero, pero alrededor del 330 a. C., los babilonios ya habían inventado un símbolo especial para denotar una posición vacía. Este símbolo sólo se usaba en casos tales como $2\times 60^3+0\times 60^2+20\times 60+59\times 60^0=217259$, mientras que para un número de la forma $13\times 60^2+33\times 60+0\times 60^0=48780$, había ambigüedad pues no se usaba dicho símbolo para indicar una posición vacía en las unidades.

Por otra parte, en la época de oro de las matemáticas griegas (de 600 a 200 a. C., aproximadamente), nunca hubo preocupación alguna por inventar un símbolo para denotar la ausencia de cantidad, y eso está directamente vinculado con la filosofía griega sobre la nada (el vacío, el no-ser), que era reacia a aceptar esos conceptos. Además, todo número representaba la longitud de un segmento de recta, un área o un volumen, lo cual hacía más difícil el uso del cero como un número. Sin embargo, en los trabajos astronómicos de Ptolomeo es posible encontrar un símbolo para representar una posición vacía, que era algo parecido a la letra griega ómicron (o), aunque en otros trabajos éste aparece con otras representaciones. Incluso en el trabajo de Diofanto se puede apreciar cierta notación para el cero (ya para esa época, en el sistema numérico griego se alcanza a percibir cierta inclinación por un sistema posicional).

Debido a lo anterior, es posible que el cero haya pasado de Alejandría a India y que allí se haya asimilado con el sistema decimal de numeración que ya usaban los hindúes. De cualquier manera, es claro que el uso de un símbolo para el cero en India, similar al que usamos actualmente, fue posterior al de los otros numerales y el registro más antiguo en el que aparece este símbolo es en una inscripción que puede datarse en el año 876, en la cual los números 50 y 270 se escriben usando el cero [9, p. 69].

La plabra hindú para referirse al cero era *śūnya*, que significa *vacío* y pasó al árabe como *as-sifr* o *sifr*. Después, cuando Fibonacci[2] escribe su *Liber Abaci*, el término pasa a ser *zephirum* y, posteriormente, otros autores lo llaman *tziphra*, *zeuero*, *ceuero* y *zepiro*. Otros nombres que vinieron después fueron *sipos*, *tsiphron*, *zeron*, *cifra* y *cero* [9, pp.72-73]. De lo anterior, se ve que la palabra cifra que usamos actualmente, en realidad era usada para nombrar el cero.

Es también oportuno señalar que los mayas, que habitaron la península de Yucatán y parte de América Central, tenían un sistema de numeración posicional de base 20 y sus logros astronómicos fueron notables. El período de máximo esplendor de esta gran civilización se sitúa del año 250 al 900 de nuestra era, aproximadamente, y fueron capaces de inventar un símbolo especial para el cero.

Podríamos abundar más sobre el origen y uso del cero en estas y otras civilizaciones, pero el espacio nos impone restricciones por lo que es necesario retomar el trabajo de Brahmagupta y hacer los comentarios finales sobre el mismo.

En la cita anterior tomada del *Brahmasphuta* vemos que las frases *" cifra* [cero] *dividida por cifra* [cero] *es nada"* y *" positivo o negativo dividido por cero es una fracción con cero por denominador"* nos indican división por cero y el autor falla en interpretar esas divisiones. Sin embargo, no hay que ser demasiado severos al juzgar este error pues, incluso en pleno siglo XVIII, grandes matemáticos como Euler y D'Alembert afirmaban que 0/0 podría ser cualquier número. Sería hasta bien entrado el siglo XVIII cuando se reconocería que la división por cero no está definida. [6, pp. 10-15].

Con respecto a ecuaciones cuadráticas, Brahmagupta da una regla satisfactoria para resolverlas y usa un simbolismo que nos hace pensar en un *álgebra abreviada*. Por ejemplo, la ecuación $x^2 - 10x = -9$ aparece en su texto como

$$\begin{array}{c} ya\ v\ 1\ ya\ 1\dot{0} \\ ru\ \dot{9}, \end{array}$$

donde el punto sobre los numerales indica una cantidad negativa. Así, *ya v* 1 significa $1x^2$, *ya* $1\dot{0}$ es $-10x$ y *ru* $\dot{9}$ corresponde a $= -9$.

La solución se da en la forma siguiente: *Aquí el número absoluto* ($\dot{9}$) *multiplicado por* (1) *el [coeficiente del] cuadrado* ($\dot{9}$)*, y agregado al cuadrado de la mitad del [coeficiente del] término medio, esto es,* 25*, hace* 16*; de lo cual la raíz cuadrada es* 4*, menos la mitad [del coeficiente de la] de la incógnita* ($\dot{5}$)*, es* 9*; y dividido por el [coeficiente del] cuadrado* (1) *produce el valor de la incógnita* 9*.*

En nuestra terminología, esto es equivalente a

$$x = \frac{\sqrt{-9 \times 1 + (-5)^2} - (-5)}{1} = 9 .$$

[2] Más adelante nos ocuparemos de Leonardo de Pisa, más conocido como Fibonacci.

Por otra parte, Brahmagupta parece haber sido el primero en dar una solución general para la ecuación lineal Diofantina $ax+by=c$, donde *a*, *b* y *c* son números enteros y la solución que se busca es entera. En el lenguaje de teoría de números, resolver esta ecuación es equivalente a encontrar todas las soluciones de la congruencia $ax \equiv c(\mathrm{mod}\, b)$, las cuales existen si y sólo si el máximo común divisor de *a* y *b* divide a *c*; en el caso de que $(a,b) = 1$, es decir, si *a* y *b* son primos relativos, Brahmagupta da todas las soluciones de esta ecuación, que nosotros escribiríamos como $x = p + mb$ y $y = q - ma$, donde *m* es un entero arbitrario y *p*, *q* son soluciones particulares.

Brahmagupta también se da a la tarea de resolver ecuaciones cuadráticas indeterminadas del tipo $Nx^2 + 1 = y^2$. Así, para la ecuación $8x^2 + 1 = y^2$ obtiene soluciones (1,3), (6,17), (35,99), (204,577), (1189,3363), etcétera. Para la ecuación $11x^2 + 1 = y^2$ da las soluciones (3,10), (161/5,534/5), etcétera. Pero Brahmagupta nos sorprende gratamente al dar la solución más pequeña para la ecuación $61x^2 + 1 = y^2$ que es x = 226153980, y = 1766319049.

Otro matemático hindú que hizo importantes contribuciones al álgebra fue Bhaskara quien vivió de 1114 a 1185. Se sabe que escribió al menos seis textos matemáticos pero los más conocidos son el *Vija-Ganita* y el *Lilavati*, los cuales contienen una gran variedad de problemas que involucran ecuaciones lineales y cuadráticas, cálculo de áreas, progresiones aritméticas y geométricas, y ternas pitagóricas, entre otros. Muchos de estos problemas provienen de textos hindúes anteriores tales como el *Brahmasphuta Siddhānta*, y aunque es posible encontrar algunos errores en los textos mencionados, Bhaskara corrige varias de las fallas en las que incurrió Brahmagupta.

Por ejemplo, en el *Vija-Ganita* se aborda el problema de la división por cero: *Afirmación. Dividendo 3. Divisor 0. Cociente, la fracción 3/0. Esta fracción de la cual el denominador es cifra [cero], es llamada una cantidad infinita. En esta cantidad que consiste de eso que tiene a cifra [cero] por divisor, no hay alteración aunque mucho sea agregado o extraído; tal y como ningún cambio ocurre en el infinito e inmutable Dios.*

De este modo, Bhaskara es el primero en afirmar que el cociente de una cantidad positiva al ser dividida por cero es infinito. De hecho las palabras … *no hay alteración aunque mucho sea agregado o extraído…* nos llevan directamente al problema del infinito que sólo se resolvió con George Cantor en el último cuarto del siglo XIX y que desde la época de los griegos había desafiado a las mentes más brillantes, tanto de las matemáticas como de la filosofía y la teología. Así, es Cantor quien pudo dar una respuesta satisfactoria a la pregunta "¿Qué es el infinito?", y nos mostró que hay muchos tipos de infinitos diferentes. Más aún, estableció que un *conjunto es infinito si es equivalente a una parte propia de sí mismo*. Por ejemplo, los números naturales son un conjunto propio de los números enteros pero los dos tienen exactamente la misma cantidad de elementos (son equivalentes). De esta manera, si a los naturales les agregamos el conjunto infinito formado por 0, -1, -2, -3, -4, …, obtenemos los enteros pero ¡el tipo de infinito no cambia!, como dice Bhaskara. Igualmente, si al conjunto de los números enteros le quitamos cualquier subconjunto propio, ¡nos queda un conjunto infinito!

Desafortunadamente, adentrándonos más en el texto, Bhaskara afirma que $\frac{a}{0} \cdot 0 = a$, lo cual nos dice que no se entendía claramente la división por cero.

Por otra parte, otro de los grandes logros de Bhaskara tiene que ver con su estudio de la ecuación de Pell[3] $px^2 + q = y^2$ que ya había sido abordada por Brahmagupta para el caso $q = 1$, pero Bhaskara perfecciona el método de aquél y considera los casos q = -4, -2, -1, 1, 2, y 4. En particular, demuestra cómo resolver la ecuación $y^2 = 67x^2 + 1$, para la cual encuentra la solución $x = 5967$, $y = 48842$.

Sin duda, las contribuciones hindúes a las matemáticas, y en particular al álgebra, son relevantes y un punto importante el cual debemos recalcar es que, a diferencia de los griegos, ellos sí consideraban verdaderos números a las raíces irracionales de números tales como $\sqrt{2}$, $\sqrt{3}$, etcétera, y que después sería de mucho significado para el álgebra. Quizá, como nos dice Boyer, esto fue "… *el resultado de una lógica muy inocente en vez de brillantez matemática. Hemos visto la falta de una adecuada distinción por parte de los matemáticos hindúes entre resultados exactos e inexactos, y era natural que ellos no tomaran seriamente la diferencia entre magnitudes conmensurables e inconmensurables*…", y después continúa: "*Las matemáticas en India eran, como hemos dicho, una mezcla de lo bueno y lo malo. Pero algunas de las cosas buenas eran superlativamente buenas* …" De cualquier manera, es claro que sus contribuciones han sido muy importantes y tan sólo con el sistema de numeración que nos legaron hubiera bastado para darles su lugar en la historia.

LA APORTACIÓN ÁRABE

Podemos decir que la historia de la cultura árabe, al menos en sus orígenes y su rápida expansión, es la historia del Islam. En efecto, en el siglo VI, la mayoría de la población de la península arábiga estaba formada por tribus nómadas independientes (beduinos), cada una con un líder (jeque); practicaban una religión politeísta con divinidades locales por lo que no era inusual que cada tribu tuviera sus dioses propios. Ciudades como La Meca y Yatrib[4] habían florecido alrededor de oasis y prosperaban con el comercio pues eran paso obligado de las caravanas que hacían la ruta de India a occidente.

En este ambiente y hacia el año 570 nace, en La Meca, Abú al-Qasim Mohamed ibn Abdalá en el seno de la familia Hashim, y quien sería conocido en occidente como Mahoma. Su familia era uno de los clanes de comerciantes más poderosos e influyentes de la ciudad; quedó huérfano y fue educado por su tío Abú Talib a quien acompañó en varios viajes de negocios en los cuales tuvo contacto con judíos y cristianos. Se casó a los 25 años con la viuda Jadiya, quien le proveyó los recursos para independizarse y emprender sus propios negocios.

Hacia 610 tuvo una revelación en la que se le apareció en arcángel Gabriel y le comunicó

[3] Atribuida erróneamente a John Pell, quien al parecer la estudió alrededor de 1688.
[4] Después vendría a ser Medina.

que él era el mensajero elegido por Alá (Dios). Estas revelaciones se repetirían a lo largo de su vida y de acuerdo con la tradición, cuando el profeta recibía una revelación, la recitaba a sus discípulos quienes la aprendían de memoria o la escribían. En 613 empieza a predicar en La Meca y despierta hostilidades entre las familias poderosas de esa ciudad; sin la protección familiar, tuvo que emigrar a Medina en el año 622. Esta "huída", que se conoce como la *hégira*, marca el nacimiento del Islam.

Una vez en Medina, consiguió la conversión de las tribus locales a la nueva religión monoteísta, que recogía elementos árabes, judíos y cristianos. Mahoma se convierte en un líder espiritual con mucho poder político. Los enfrentamientos con La Meca no se hicieron esperar por lo que las dos ciudades se enfrentaron en varias batallas con saldo a favor del profeta, y las cuales terminaron en 627. Expulsa por ese tiempo a los judíos de la ciudad de Medina que no se convierten al Islam y consigue muchos más adeptos, incluso de la ciudad enemiga. En 630, La Meca se rinde definitivamente y consigue la lealtad de las tribus más poderosas de la ciudad y se convierte así en el hombre más poderoso de Arabia y unifica a muchas de las tribus nómadas de la península por lo que nace el estado árabe, con el Islam como la religión oficial. Regresa a Medina y emprende una campaña contra Siria. En 632 hace otra peregrinación a La Meca y muere al año siguiente.

Después de su muerte, la expansión del Islam continúa y ya para 651 el estado musulmán se había extendido hasta alcanzar Damasco, Jerusalén, Alejandría, Egipto, Mesopotamia y Persia. En 650 los escritos y relatos orales de las revelaciones del último de los profetas fueron recopilados en el Corán[5], que es el libro sagrado de los musulmanes. Las conquistas árabes continuaron y a pesar de los conflictos internos, la organización económica y religiosa, más que la política, era lo que mantenía unido al estado árabe. Ya en el año 750, a poco más de un siglo de haber surgido, los conquistadores musulmanes habían expandido sus dominios hasta India, el norte de Africa y casi la totalidad de la península Ibérica.

Una característica importante de esta conquista es que los súbditos no eran obligados a convertirse al Islam y, de hecho, judíos y cristianos eran tolerados. Las luchas internas trajeron como consecuencia la separación política en dos estados islámicos, uno de occidente y otro de oriente. El imperio de oriente, bajo el mando del califa al-Mansur fundó la ciudad de Bagdad en 762 a orillas del río Tigris y convirtió a ésta en la capital del estado árabe de oriente y, gracias a la tolerancia religiosa y cultural, pronto floreció como un centro político, religioso y comercial, con una intensa actividad.
Bajo el régimen del califa Harún al-Rashid, de 786 a 809, Bagdad alcanzó su máximo esplendor y llegó a ser un centro científico muy importante que daba cabida a académicos hindúes, persas, sirios, judíos y cristianos. En particular, en lo que respecta a las matemáticas, Bagdad vino a ser la nueva Alejandría y bajo el régimen del califa al-Mamún, de 809 a 833, se llevó a cabo una labor de traducción sin precedentes de todos los tratados griegos disponibles. Cuenta la tradición que al-Mamún tuvo un sueño en el cual aparecía Aristóteles, por lo que ordenó traducir todos los trabajos griegos que se pudieran conseguir,

[5] al-Qur'ãn, la lectura.

entre los que se contaban Los Elementos de Euclides y el Almagesto[6] de Ptolomeo, y fundó una Casa de la Sabiduría, que sería lo equivalente a un centro de investigación de la actualidad.

Entre los académicos de la Casa de la Sabiduría estaba el matemático y astrónomo al-Juarismi (780-850), de quien ya hablamos en la primera parte. Apuntábamos allí que el trabajo de este matemático ejerció gran influencia en el desarrollo de las matemáticas en Europa, pues su libro sobre el sistema de numeración hindú y su libro de álgebra fueron determinantes en esta etapa de la evolución de las matemáticas.

En el *Hisãb al-jabr w'al-muqãbalah*, o *al-jabr*, como le llamaremos aquí, al-Juarismi nos dice que el libro fue escrito a petición del califa al Mamún, "*… quien me alentó a componer un pequeño trabajo sobre [cómo] Calcular por medio de [las reglas de] Completación y Reducción, confinándose a lo que es lo más fácil y más útil en aritmética, tal como los hombres lo requieren en sus casos de herencias, legados, reparticiones, pleitos y comercio, y en todos sus tratos con otro, o donde la medida de tierras, la excavación de canales, cálculos geométricos y otros objetos de varias clases y tipos estén involucrados …*" según se lee en el prólogo de esta obra [7, p. 3].

El *al-jabr* se divide en tres partes. En la primera de ellas se explica cómo resolver problemas que involucran la *cosa* y su *cuadrado*, a los cuales al-Juarismi llama *shaî* y *mal*, respectivamente. Así, estos problemas equivalen para nosotros a resolver ecuaciones lineales y cuadráticas, que el autor clasifica en seis tipos diferentes y de los cuales ya hablamos en la parte I.

Como ya sabemos, el álgebra en ese tiempo era verbal y presentamos un ejemplo tomado del *al-jabr* para darnos una idea de esto. El problema propuesto por al-Juarismi es el siguiente: He dividido diez en dos porciones. *"He multiplicado una de las porciones por la otra. Después de esto, he multiplicado la una de las dos por sí misma, y el producto de la multiplicación por sí misma es tanto como cuatro veces el de una de las porciones por la otra"* [7, p. 35].

Al-Juarismi procede a resolver este problema de la manera siguiente: Llama *cosa* a una de las porciones; la otra es *diez menos la cosa*. Al multiplicar las dos obtiene *diez cosas menos un cuadrado* (*mal*), y siguiendo con el problema, le resulta la "ecuación": *"Un cuadrado, el cual es igual a cuarenta cosas menos cuatro cuadrados"*. Notemos que si x es la *cosa*, entonces $10-x$ es *diez menos la cosa*. Multiplicamos x consigo misma y obtenemos x^2 que debe ser igual a cuatro veces el producto de x por $10-x$. Es decir, nos resulta la ecuación

$$x^2 = 4x(10-x),$$

por lo que

$$x^2 = 40x - 4x^2.$$

[6] *Almagesto*, el más grande, es el nombre que le dieron los árabes a la obra astronómica de Ptolomeo, llamada *Syntaxis Mathematica* y se le llamaba *Magiste*, la más grande, para distinguirla de otras obras de menor relevancia.

Al-Juarismi usa *al-jabr* para restaurar el balance:

$$x^2 + 4x^2 = 40x - 4x^2 + 4x^2,$$

luego aplica *al-muqãbalah* para cancelar los opuestos:

$$5x^2 = 40x,$$

de donde

$$x^2 = 8x,$$

y se obtiene $x = 8$.

La segunda parte del *al-jabr* trata sobre las matemáticas de la medición, esto es, de fórmulas para el cálculo de áreas y volúmenes. Por ejemplo, da tres fórmulas para calcular el perímetro de una circunferencia y dos de ellas son de origen griego, mientras que la tercera, que encontramos en el trabajo de Brahmagupta, es notable porque nos da una muy buena aproximación para la razón del perímetro de la circunferencia a su diámetro: $\pi =$ 3.14.16. En la tercera parte del *al-jabr* se discuten problemas de herencias que son resueltos por medio de ecuaciones lineales y aritmética elemental, pero que nos muestran un complicado sistema de herencias en la cultura árabe.

Otro gran matemático árabe que hizo contribuciones importantes fue Thabit ibn-Qurra (836-931), quien trabajó en astronomía y estudió ecuaciones cuadráticas y sus soluciones; escribió un pequeño trabajo al respecto, en el cual se propone verificar y justificar los métodos usados por los algebristas en sus problemas, pero usando herramientas geométricas. Sus aportaciones más importantes tienen que ver con Teoría de Números, más específicamente con la determinación de *números amigables*. Un aspecto importante del trabajo de ibn-Qurra es que fundó una escuela de traducción y gracias a él se conocen los primeros siete libros de las cónicas de Apolonio; de otra manera, sólo se hubieran conocido los primeros cuatro.

Las diferentes facetas de matemático, poeta, filósofo y astrónomo se conjugaron en Omar Khayyam (c. 1050-1123). Sus contribuciones al álgebra son importantes pues escribió un tratado de álgebra que va mucho más allá del de al-Juarismi pues aparte de presentar la teoría para resolver la ecuación de segundo grado, aborda la solución de ecuaciones cúbicas por medio de construcciones geométricas. Las soluciones que obtiene en el caso de la cúbica están dadas como los puntos de intersección de curvas; por ejemplo, una hipérbola y un círculo, o una hipérbola y una parábola.

Recordemos que este problema ya había sido abordado por Arquímedes, pero Omar Khayyam da un tratamiento sistemático que incluye muchos casos, de acuerdo a los coeficientes de la cúbica, pues, al no manejar números negativos, se tenían distintos tipos de esta ecuación, como por ejemplo, cubos y cuadrados iguales a números ($ax^3 + bx^2 = c$), o cubos y raíces iguales a cuadrados ($ax^3 + bx = cx^2$), etcétera.

Otros matemáticos árabes destacados fueron: Muhamed Abu'l-Wefa (940-998), a quien se le atribuye un tratado de álgebra, la traducción de la Aritmética de Diofanto y una versión abreviada del Almagesto; Abu Bekr al-Kharki (953-1029), quien escribe un texto de álgebra, el Al-Fakhri, y se le da crédito por haber dado la primera solución numérica de ecuaciones de la forma $ax^{2n} + bx^n = c$; algunos opinan que es el primer matemático en liberar completamente al álgebra de las operaciones geométricas y reemplazarlas con operaciones de tipo aritmético.

Otros matemáticos importantes fueron Abu Kamil Shuja (850-930), Abu Jafar al-Khazin (900-971), Abu Ali al-Haytham (965-1040) y Abu Rayhan al-Biruni (973-1048). Podríamos mencionar a algunos más pero creemos que los anteriores son bastante representativos de la contribución árabe a las matemáticas y en particular al álgebra.

Las anteriores son algunas de las aportaciones de la cultura arábiga a las matemáticas, particularmente al álgebra. Sin embargo, es importante notar que abarcaron muchas áreas del conocimiento. Por ello, la deuda que occidente tiene con esta cultura es incalculable, pues no sólo preservaron y transmitieron mucho del conocimiento helénico, sino que también hicieron contribuciones originales muy valiosas y diversas; en particular, el álgebra árabe dista mucho de la de sus antecesores. Por otro lado, no sabemos con certeza el por qué de ese interés en el álgebra por parte de los árabes; quizá una pista podría dárnosla su complicado sistema de leyes de herencia pues la división de las propiedades involucraba el tener que resolver ecuaciones algebraicas bastante sofisticadas. De cualquier manera, su legado ha sido decisivo en el desarrollo de esta ciencia.

Por último, diremos que es posible distinguir cuatro características en las matemáticas árabes: su sistema numérico y su aritmética se derivan de fuentes indias, pero los árabes le agregaron su invención de las fracciones decimales. Su álgebra tiene raíces griegas, indias y babilónicas pero los árabes le dieron una nueva forma. Su trigonometría tiene esas mismas fuentes pero pudieron hacer una combinación de ellas y obtener nuevas fórmulas y funciones. Finalmente, su geometría es griega en su forma, si bien combina los contenidos y métodos de Euclides, Apolonio y Arquímedes. Esto hace que la contribución árabe a la matemática y a la ciencia en general sea de mucha valía, lo que merece un justo reconocimiento.

LOS COMIENZOS DEL ALGEBRA EN EUROPA

Como ya hemos apuntado, los historiadores consideran que la Edad Media en Europa comienza con la caída de Roma en 476 y termina con la conquista de Constantinopla en 1453 por parte de los turcos. En los casi mil años que duró este período, se conjuntaron en Europa muchos factores de tipo político, religioso, social y económico que trajeron como consecuencia un estancamiento en muchas de las actividades que son vitales para el progreso del hombre. Actitudes que, en el mejor de los casos, eran de abierta desconfianza hacia el estudioso de las ciencias. Mientras que en los siglos V a XII en la India y el mundo árabe se dieron grandes contribuciones a la ciencia en general, y a las matemáticas en particular, la Europa vivió horas muy negras de inestabilidad y retroceso. En contraste, la España árabe de los siglos VIII a XII fue un centro cultural muy importante al que concurrían todos los europeos interesados en aprender la ciencia arábiga.

Es entonces significativo que el siglo XII represente un parteaguas en la historia de la ciencia en Europa. En efecto, el sistema de enseñanza cambió radicalmente pues en ese siglo nacieron las universidades y se asumió una nueva actitud hacia las ciencias físicas y matemáticas. Varios teólogos también asumieron una posición más inquisitiva con respecto a la naturaleza y surgió un nuevo y manifiesto interés por la filosofía.

Estos teólogos y pensadores del siglo XII realmente marcaron una diferencia con respecto a los escolásticos que les precedieron y sus críticas al status quo predominante fueron importantes en la medida en que se cuestionó la apatía de la mayoría de los hombres letrados de ese tiempo por tratar de entender la naturaleza pues "*… no buscaban descubrir en la naturaleza 'razones' o 'causas naturales', sino significados o enseñanzas religiosas y morales…*" [10, p. 98]. Por ejemplo, Guillermo de Conches, refiriéndose a los clérigos que no tienen interés por el conocimiento, dice de ellos: "*Quieren que todos los demás sean compañeros de su ignorancia; no quieren que los demás se dediquen a la investigación: quieren que creamos a la manera de los campesinos, sin buscar la razón en nada…*" [10, pp. 88-90]; y Adelardo de Bath (1075-1160), en sus reproches a aquellos autores cegados por el prestigio de la autoridad, les dice: "*Yo, en efecto he aprendido de mis maestros árabes a tomar la razón como guía; pero tú, sometido a los falsos pretextos de la autoridad, te dejas conducir con un ronzal ... Porque no comprendéis que la razón ha sido otorgada a cada individuo a fin de que pueda discernir lo verdadero de lo falso, utilizando la razón como juez supremo*." [10, p. 96].

Los cambios que trajo el siglo XII fueron en especial favorables a las matemáticas pues se reavivó el interés por el estudio de esta ciencia en Europa, que fue alimentado por la inmensa labor de traducción de los textos científicos árabes al latín, que se había iniciado en el siglo X en el norte de España y siguió durante el siglo XI; sin embargo, cuando los cristianos españoles liberaron Toledo del dominio árabe en 1085, el movimiento traductor continuó con un fervor inusitado y en el siglo XII dicha actividad creció aún más. De esta manera, occidente tuvo acceso a muchos de los tratados de filosofía, matemáticas, medicina y astronomía (aunque también de magia, alquimia y astrología), escritos por autores y eruditos árabes, o bien que provenían de la antigüedad clásica a través de los traductores musulmanes.

Algunos de los escolásticos más destacados que llevaron cabo esta importantísima labor fueron Adelardo de Bath, Platón de Tívoli (*c*. 1116-1180), Rodolfo de Bruges (*c*. 1125-1150), Domingo Gundisalvo (*c*. 1130-1180), Robert de Chester[7] (*c*. 1140), Hermann el Dálmata (*c*. 1143), Juan de España[8] (murió en 1180) y Gerardo de Cremona (1114-1187). La mayoría de ellos eran eclesiásticos y algunos tuvieron cargos importantes en la iglesia de ese tiempo. De hecho, casi todas las traducciones se realizaban en los monasterios cristianos y la escuela de traductores del Arzobispo Raimundo de Toledo llegó a ser una de las más importantes. Sin embargo, tampoco en este caso debe quedar la impresión de que sus aportaciones sólo quedaron al nivel de la traducción de textos, pues sabemos que también se estudiaba y asimilaba lo traducido. Por ejemplo, los métodos árabes e hindúes para resolver ecuaciones cuadráticas ya se dominaban desde finales del siglo XI.

[7] De origen inglés, se sabe que vivió en España de 1140 a 1147 y fue archidecano de Pamplona en 1143.
[8] Conocido también por Juan de Sevilla y Johannis Hispaliensis.

De esta manera, todo ese conocimiento se fue divulgando, por lo que a comienzos del siglo XIII ya habían empezado a circular textos escritos por autores europeos. En especial, tres trabajos sobre el uso de los números indo-arábigos son de llamar la atención: El *Carmen de Algorismo* de Alexandre de Villedieu (*c*. 1225); el *Algorismus vulgaris* de John de Halifax (*c*. 1200-1256), y el *Liber Abaci* de Leonardo de Pisa (1170-1250). Aunque los dos primeros son importantes, comentaremos un poco más sobre el tercero, dada su relevancia en la historia del álgebra.

Leonardo de Pisa (1170-1250), es mejor conocido por Fibonacci que es una abreviación de *filio Bonacci* (hijo de Bonacci); fue hijo de Guilielmo, de la familia Bonnacci, quien era representante de los mercaderes de Pisa (Italia) en el comercio que éstos realizaban en el norte de África. Es por eso que Leonardo estudió con un maestro árabe y viajó por Egipto, Siria y Grecia, y así aprendió el álgebra y el sistema de numeración de los árabes; él mismo nos lo cuenta en el *Liber Abaci*:

"*Cuando mi padre, quien había sido nombrado por su país como notario público de la aduana en Bugia*[9] *en representación de los mercaderes pisanos que iban allí, estaba en su cargo, me llevó con él mientras yo era todavía un niño, y teniendo un ojo para lo útil y las conveniencias futuras, quiso que permaneciera allí y recibiera instrucción en la escuela de contabilidad. Cuando fui introducido al arte de los nueve símbolos de los hindúes por medio de una muy buena enseñanza, el conocimiento del arte muy rápidamente me complació sobre todo lo demás y logré entenderlo…*"

Esto nos muestra que también el comercio desempeñó un papel muy importante en la transmisión del conocimiento árabe a Europa; en particular, los mercaderes italianos estuvieron usando los números indo-arábigos para sus asuntos mercantiles desde mucho antes que se extendiera su uso en el continente. En apoyo de esta tesis, debemos señalar que estos numerales ya se conocían en la España del siglo X, pues se sabe que en 980 Gerbert de Aurillac (*ca*. 940-1003) ya los enseñaba. Este religioso, que en 999 sería nombrado Papa (Silvestre II), llegó a España en 967; estudió en Barcelona y también, con maestros árabes, en Córdova y Sevilla. Es posible que su aprendizaje sobre los números indo-arábigos lo haya obtenido mientras estudiaba en el monasterio de Santa María de Ripoll, un centro educativo muy conocido, situado cerca de Barcelona. De hecho, Smith en [9, pp. 75-76] escribe: "… *Existe considerable evidencia que apoya la creencia de que los monjes en este claustro obtuvieron su conocimiento de estos numerales a través de fuentes mercantiles que estaban en comunicación con el Este, en vez de los canales moros en la España mahometana*."

Por otra parte, el *Liber Abaci*, que apareció en 1202, no es un libro sobre el uso del ábaco como su nombre lo indica, sino que es un tratado muy completo en el que se incluyen problemas en los cuales se usa el sistema de numeración indo-arábigo de las "*nueve figuras significativas*" y el *cero* (*zephirum* para Fibonacci). También en él se explican las operaciones aritméticas y la extracción de raíces, problemas sobre transacciones comerciales y cálculos sobre conversión de diferentes tipos de monedas.

[9] Puerto del Mediterráneo al noreste de Argelia.

Uno de los capítulos del *Liber Abaci* tiene por nombre *Aljebra et almuchabala* y en él se discuten métodos algebraicos para la solución de ecuaciones y se puede observar que los problemas discutidos vienen de fuentes árabes, concretamente de Abu Kamil y de al-Juarismi. Es interesante observar que un problema sobre la reproducción de conejos, que se explica en este texto, lo haya llevado a plantear la sucesión 1, 1, 2, 3, 5, 8, 13, …, b_n, …, donde $b_{n+1} = b_n + b_{n-1}$ y que sabemos tiene la propiedad de que

$$\lim_{n\to\infty} b_n / b_{n-1} = \tfrac{1+\sqrt{5}}{2} \approx 1.618033989,$$

número al cual se le llama *razón dorada* y que está presente de muchas formas en la naturaleza.

El *Liber Abaci*, junto con *Floss* (1225) y *Liber Quadratorum* (1225), fueron los trabajos más famosos de Fibonacci. En *Floss* se resuelven ecuaciones algebraicas determinadas e indeterminadas, de los que dos problemas son de llamar la atención:

1. Encontrar un número tal que su cuadrado sumado con cinco y su cuadrado menos cinco sean ambos cuadrados.
2. Encontrar un número tal que su cubo, dos cuadrados y diez raíces sean veinte.

El primero de estos lo podemos plantear como sigue: encontrar *x* tal que $x^2 + 5 = a^2$ y $x^2 - 5 = b^2$; el segundo problema los escribimos como: encontrar *x* de tal manera que $x^3 + 2x^2 + 10x = 20$. Fibonacci presenta en *Floss* la solución para el primer problema simplemente como $x = 3\tfrac{5}{12}$, por lo que $x^2 + 5 = (4\tfrac{1}{12})^2$ y $x^2 - 5 = (2\tfrac{7}{12})^2$, y en el *Liber Quadratorum* se da un análisis más detallado del mismo.

Con respecto al segundo, es interesante repasar el análisis que hace Leonardo y que transcribimos de la siguiente manera: dado que

$$x^3 + 2x^2 + 10x = 20, \tag{1}$$

se tiene

$$10(x + \tfrac{1}{10}x^3 + \tfrac{1}{5}x^2) = 20, \tag{2}$$

de donde se obtiene

$$x + \tfrac{1}{10}x^3 + \tfrac{1}{5}x^2 = 2, \tag{3}$$

y, en consecuencia, $x < 2$.

Pero notemos que de (1) se tiene $1 + 2 + 10 = 13 < 20$ por lo que $x > 1$. Pero además *x* no puede se una fracción pues si $x = \tfrac{a}{b}$, entonces de (3) se sigue que

$$\tfrac{a}{b} + \tfrac{a^3}{10b^3} + \tfrac{a^2}{5b^2}$$

no puede ser un entero. Por lo tanto, *x* debe ser un irracional; pero tampoco puede ser un irracional de la forma $\sqrt{m}$, para un entero positivo *m*, pues de (1) se tiene

$$x = \frac{20 - 2x^2}{10 + x^2},$$

por lo que si $x = \sqrt{m}$, entonces

$$\sqrt{m} = \frac{20-m}{10+m},$$

lo cual es absurdo al ser x irracional. Pero "*x no puede ser alguna de las irracionalidades discutidas en el libro X de Los Elementos de Euclides, tales como* $\sqrt{a+\sqrt{b}}$ ", concluye el pisano [12, p. 49].

De esta manera, la solución buscada es un número irracional x que cumple $1 < x < 2$ y Fibonacci termina su análisis del problema presentando una solución aproximada:

$x = 1;22,7,42,33,4,40$, ¡en notación sexagesimal! Esto es,

$$x = 1 + \tfrac{22}{60} + \tfrac{7}{60^2} + \tfrac{42}{60^3} + \tfrac{33}{60^4} + \tfrac{4}{60^5} + \tfrac{40}{60^6},$$

por lo que

$$x \approx 1.368808106,$$

y sustituyendo este valor en la expresión $x^3 + 2x^2 + 10x$, obtenemos 19.99999995. Por lo tanto,

$$20 - (x^3 + 2x^2 + 10x) = 0.00000005,$$

y, así, la solución propuesta es notablemente precisa. No se sabe acerca de los métodos utilizados por el Pisano para llegar a tal precisión. Boyer [1, p. 256] especula que quizá a través de los árabes haya aprendido lo que ahora se llama el *método de Horner*, el cual ya se conocía en China desde mucho tiempo antes. De cualquier manera, el haber propuesto tal solución nos revela la gran familiaridad de Fibonacci con los números.

Por otra parte, el *Liber Quadratorum* es también un trabajo muy importante sobre ecuaciones algebraicas indeterminadas (v. g. $x^2 + y^2 = z^2$), y en él encontramos fórmulas que nosotros escribiríamos como

$$12(1^2 + 3^2 + 5^2 + \cdots + n^2) = n(n+2)(2n+2) \quad \text{(para } n \text{ impar)}$$

y

$$12(1^2 + 4^2 + 6^2 + \cdots + n^2) = n(n+2)(2n+2) \quad \text{(para } n \text{ par).}$$

Asimismo, identidades como

$$(a^2 + b^2)(c^2 + d^2) = (ac+bd)^2 + (bc-ad)^2 = (ad+bc)^2 + (ac-bd)^2,$$

son de uso frecuente en este texto.

Debido a la gran originalidad de sus trabajos, podemos considerar a Fibonacci como el algebrista europeo más importante de la Edad Media; muchas de las matemáticas involucradas en ellos estaban muy adelantadas para su época. Pero si bien la figura de Fibonacci eclipsó durante mucho tiempo a otros personajes, contemporáneos y posteriores a él, que hicieron contribuciones a las matemáticas, creemos que es justo mencionarlos pues no se puede despreciar el trabajo que hicieron. Así, Jordanus Nemorarius (1225-1260) escribió sobre aritmética, álgebra y geometría. En su *Arithmetica* encontramos el primer uso de letras para denotar números, aunque de manera bastante confusa; en su otro trabajo, *De numeris datis*, se presentan algunas reglas algebraicas para encontrar números a partir de uno dado y para lo cual se deben satisfacer ciertas condiciones. Thomas Bradwardine (1295-1349) escribió varios textos entre los que podemos mencionar *Tractatus de proportionibus*, *Arithmetic* y *Geometry*.

Nicolás de Oresme (1323-1382) merece mención aparte. En efecto, en su libro *De proportionibus proportionum* presenta reglas aritméticas para manejar proporciones que equivalen, en nuestra notación moderna, a las leyes de los exponentes $x^m x^n = x^{m+n}$ y $(x^m)^n = x^{mn}$ y de las que da ejemplos concretos para cada una. En su obra *Algorismus proportionum* aplica estas reglas a problemas de geometría y de física; en este mismo trabajo introduce cierta notación para escribir potencias fraccionales, por ejemplo, escribe $\frac{1}{2}\,2^p$ para la expresión $2^{\frac{1}{2}}$ y $\left[1^p\,\frac{1}{2}\,4\right]$ para $4^{1\frac{1}{2}}$; sugiere además que también son posibles proporciones irracionales, es decir, lo que nosotros escribiríamos como $a^{\sqrt{2}}$, por ejemplo. Sin embargo, la mayor influencia la ejercería Oresme con sus ideas sobre la representación gráfica de una cantidad variable, que expuso en sus escritos *Tractatus de latitudinibus formarum* y *Tractatus de uniformitate et defformitate intensionum*. Es ellos se estudia la velocidad de cuerpos en movimiento utilizando un método gráfico: en una línea horizontal, Oresme marca instantes de tiempo y las llama *longitudes*; sobre cada una de ellas dibuja una línea vertical cuya longitud representa la velocidad del objeto y a las cuales llama *latitudes*. La serie de puntos que determinan los extremos de las latitudes es llamada *forma*.

Estos son los primeros intentos significativos de lo que llamaríamos representación gráfica de una función y los primeros pasos conscientes hacia el desarrollo de un sistema de coordenadas en el cual las longitudes corresponden a nuestras abscisas y las latitudes a nuestras ordenadas. Al parecer, estos métodos eran objeto de estudio en universidades alemanas hacia el final del siglo XIV; Kepler y Galileo también reconocieron su importancia. Más aún, se dice que estos trabajos pudieron haber influenciado a Descartes en su formulación de la geometría analítica.

En el siglo XV se conjugaron una multiplicidad de factores que trajeron como consecuencia nuevas formas de organización política, social y económica en Europa. Inventos como la imprenta y la brújula tuvieron una influencia decisiva en los cambios que se darían. Fue así posible explorar y descubrir nuevos continentes; los libros alcanzaron a un mayor número de lectores y se favoreció una visión antropocéntrica del mundo, es decir, el hombre como centro de todas las cosas y el fin absoluto de la naturaleza. La Edad Media llegaba a su fin y comenzaba el Renacimiento.

Un personaje que vivió en ese período de transición, de relevancia para las matemáticas, fue Johann Müller de Königsberg (1436-1476), más conocido como Regiomontanus[10]. Sus principales obras, *De triangulis omnimodis* y *Tabulae directionum*, dieron un nuevo impulso a la trigonometría que sólo se estudiaba por su utilidad en astronomía. Estos trabajos la establecieron como una ciencia independiente.

En estos trabajos es posible apreciar la familiaridad de Regiomontanus con los métodos algebraicos para resolver ecuaciones cuadráticas y los aplica en sus problemas trigonométricos. Sin embargo, su álgebra es todavía retórica, en gran contraste con la correspondencia que mantiene con el Cardenal Blanchinus[11] en la cual desarrolla un simbolismo propio para la escritura de ecuaciones que tiene bastantes similitudes con el

[10] La palabra alemana Königsberg significa montaña del rey (regio-montanus).
[11] Giovanni Bianchini.

nuestro: para el signo de adición usa una abreviación que representa la palabra *et*; el signo de sustracción es una ligadura de la palabra *minus*, y para el signo de igualdad usa un segmento de línea recta. También para las raíces usa un símbolo parecido a *R* que es una abreviación de la palabra *radix*. Así por ejemplo, $R\ quadrat\ \frac{89}{4}$ significa $\sqrt{\frac{89}{4}}$; además, en esta álgebra abreviada, se tienen símbolos separados para las tres primeras potencias de la incógnita, esto es, para x, x^2 y x^3. Es por esto que, sin lugar a dudas, Regiomontanus está muy próximo al simbolismo algebraico moderno y adelanta, en este aspecto, a muchos de sus contemporáneos.

Otro trabajo significativo que tuvo lugar hacia finales del siglo XV es el de Nicolás Chuquet (1445-1488). Su principal obra *Triparty en la science des nombres*[12] apareció en forma manuscrita en 1484 y es el primer libro francés sobre álgebra. En éste se percibe una clara evidencia italiana y es posible que Chuquet estuviera familiarizado con el *Liber Abaci* de Fibonacci. La primera de la tres partes trata sobre aritmética y sobre el manejo de los números indo-arábigos y las operaciones aritméticas de suma, resta, multiplicación y división. En la segunda parte se discute sobre raíces de números y se introduce un simbolismo abreviado para las expresiones que se manejan. Así, la expresión $R)^2.14.\overline{m}.R)^2 180$ es, en nuestra notación, $\sqrt{14-\sqrt{180}}$.

La tercera parte de esta obra está dedicada a problemas de tipo algebraico y Chuquet desarrolla su propia notación; de esta manera, las expresiones $.5.^1$, $.6.^2$ y $.10.^3$ representan $5x$, $6x^2$ y $10x^3$, respectivamente. También usa exponentes negativos y un ejemplo nos lo da al dividir $.72.^1$ entre $.8.^3$, dando por resultado $.9.^{2m}$, esto es $72x/8x^3 = 9x^{-2}$; asimismo, $.9.^0$ significa $9x^0$ y le queda claro que para cualquier número *x*, se tiene $x^0 = 1$. Más interesante aún es el ejemplo que escribe como $.4.^1$ *egaulx a* $\overline{m}.2.^0$ y que representa a la ecuación $4x = -2$. Lo significativo de esto es que Chuquet es, al parecer, el primero en escribir una ecuación algebraica en la cual un término negativo aparece de forma aislada.

Desafortunadamente el trabajo de Chuquet no tuvo gran influencia y eso se debió a la aparición, en 1494, del primer libro impreso de álgebra. En efecto, se trata de *Summa de arithmetica, geometrica, proportioni et proportiolanita* del fraile Luca Pacioli (1445-1517), publicado en italiano, su lengua nativa, lo cual era inusual en ese tiempo. Este trabajo es un compendio del conocimiento matemático general de ese tiempo y trata sobre aritmética, álgebra, geometría euclidiana elemental y teneduría de libros, en la cual se introduce por primera vez la contabilidad de doble columna.

La *Summa* no es un trabajo en el que se presenten resultados novedosos sino más bien es un sumario de hechos conocidos y, a pesar de su falta de originalidad, resultó ser una obra que tuvo mucha influencia para el desarrollo de las matemáticas en Europa. La notación usada por Pacioli es mucho más simple que la de Fibonacci y seguramente eso contribuyó a su éxito. Así, Pacioli usa la abreviación *co*. de *cosa* para denotar la incógnita de una ecuación; *ce*., de *censo* para su cuadrado; *cu*., de *cubus*, para su cubo, y *ce.ce*., de *censo censo*, para la cuarta potencia. Para la suma usa *p* (abreviación de *piu*, más) y *m* (menos) para la

[12] "Tres partes" sobre la ciencia de los números.

sustracción; las raíces cuadradas eran indicadas por *R* o *R2*; las raíces cúbicas por *R3*, y las raíces cuartas por *R4* o *RR*. Por ejemplo, la expresión *RV40* $\tilde{m}$ *R320* que aparece en su tratado es simplemente $\sqrt{40-\sqrt{320}}$, donde la letra V indica que la raíz cuadrada debe aplicarse a toda la expresión pues V se usa por la U de la palabra Universale. Otro ejemplo que encontramos en la *Summa* es el siguiente: "*Trouame .I. nº. che giõto al suo* $\bar{q}$ *drat° facia .12.*" (Encuéntrame un número que junto con su cuadrado hagan 12), el cual representa la ecuación $x+x^2=12$. En la parte de álgebra de esta obra se presentan métodos de solución para las ecuaciones lineales y cuadráticas que eran ya bien conocidos. En lo que respecta a ecuaciones de grado tres en las que intervienen (a) *numero, cosa e cubo* (n, x y x^3) , (b) *numero, censo e cubo* (n, x^2 y x^3), (c) *numero, cubo e censo de censo* (n, x^3 y x^4), Pacioli comenta que "*no ha sido posible hasta ahora formar reglas generales*" para resolverlas.

Se sabe que Pacioli enseñó en varias universidades italianas y fue muy amigo de Leonardo da Vinci de quien recibió una gran influencia; el propio da Vinci ilustró el libro *Divina proportione* de Pacioli, publicado en 1509. Entre las universidades más famosas de ese tiempo en Europa, estaba la Universidad de Bolonia en la que Pacioli enseñó durante los años 1501-1502 y conoció a Scipione del Ferro quien era profesor de matemáticas allí y del que hablaremos más adelante en relación con la solución de ecuaciones cúbicas. Seguramente, Pacioli y del Ferro discutieron este problema, que tiempo después, tendría una importancia sin precedentes en el desarrollo del álgebra.

Sin lugar a dudas, en la Italia de los siglos XV y XVI se formaron los algebristas más capaces de Europa y es posible hablar de una escuela italiana de álgebra. Sin embargo, en Alemania se estaban dando pasos muy importantes en el dominio de esta disciplina y en 1524 aparece un trabajo que también influiría en esa dirección. Se trata de *Die Coss*[13] de Adam Riese (1492-1559), en el que se exponen problemas algebraicos y se menciona el *al-jabr* de al-Juarismi. Riese también escribió otros tratados muy influyentes sobre aritmética que sirvieron para desplazar el sistema de cálculo con ábaco y el conteo con numerales romanos por el sistema más eficiente que usaba los números indo-arábigos y que en ese tiempo estaba prohibido en muchos países de Europa.

Otros trabajos alemanes importantes que trataban cuestiones algebraicas fueron *Coss* de Christoph Rudolff (1499-1545), publicado en 1525 y en el cual se usaban, por primera vez, la notación decimal para fracciones y los símbolos √ para la raíz cuadrada, v√ para la raíz cúbica y vv√ para la raíz cuarta; en 1527 se publicó *Rechnung*[14] de Peter Apian (1495-1552), un trabajo que trata, principalmente, de aritmética comercial.

Mención especial merece el tratado de Michael Stiefel (1487-1567) titulado *Arithmetica integra*, publicado en 1544. En este se trabaja con números negativos, radicales y potencias; Stiefel menciona varias veces las leyes de los exponentes y se da cuenta de la importancia de manejar exponentes negativos. Además, los distintos casos que se consideraban para una ecuación cuadrática los reduce a uno sólo mediante el uso de números negativos como

[13] La cosa (en referencia a la incógnita de una ecuación: cosa). Ver Parte I, p. 11.
[14] Cálculos.

coeficientes de la incógnita. También su trabajo sirvió para hacer extensivo el uso de los símbolos alemanes + y – para la adición y la resta, respectivamente; éstos aparecieron por primera vez impresos en 1489 en un trabajo de aritmética de Johanes Widman (1462-1498), publicado en Alemania, aunque el primer tratado en el que aparecen ligados a expresiones algebraicas data de 1514 y se debe al matemático alemán Van der Hoecke [9, p. 399].

LA ESCUELA ITALIANA DE ALGEBRA Y LA TEORÍA DE ECUACIONES

Un hecho muy interesante ocurrido hacia mediados del siglo XVI, cuando Europa estaba en pleno Renacimiento, es la publicación casi simultánea de tres obras que serían consideradas las más grandes aportaciones renacentistas a la ciencia: estamos hablando de *De revolutionibus orbium celestium*[15] de Nicolás Copérnico (1473-1543), que fue publicada en 1543; *De humanis corporis fabrica*[16] de Andreas Vesalius (1514-1564), también publicado en 1543, y *Artis magnae sive de regulis algebraicis*[17] de Girolamo Cardano (1501-1576), que se publicó en 1545.

Las dos primeras obras rompieron con la idea medieval que se tenía del funcionamiento del universo y del cuerpo humano, respectivamente, además de jugar un papel central en la conformación de la ciencia moderna. En lo que respecta al *Arte magno*, debemos decir que su influencia estuvo más limitada a las matemáticas y fue una pieza fundamental para el posterior desarrollo del álgebra moderna pues por primera vez se daban reglas generales para resolver ecuaciones cúbicas y bicuadráticas, similares a las que desde antiguo se conocían para el caso de la cuadrática.

Recordemos que en el caso de una ecuación cuadrática las soluciones están dadas por una expresión que sólo involucra operaciones aritméticas elementales sobre los coeficientes de la ecuación (ver Parte I); estas operaciones a las que hacemos referencia son suma, resta, multiplicación, división y extracción de raíces cuadradas. Llamamos a este proceso *resolver la ecuación por medio de radicales*. En el caso de las cúbicas y bicuadráticas, se pretende lo mismo: obtener sus raíces por medio de realizar operaciones aritméticas sobre los coeficientes de una ecuación dada. Este problema, el cual era considerado en el mismo nivel que el problema griego de la *cuadratura del círculo* por Pacioli, se resuelve afirmativamente en la obra de Cardano y al mismo tiempo se desata una gran controversia por la autoría de los métodos y de la cual hablaremos brevemente en este trabajo.

Como hemos dicho, Scipione del Ferro (1465-1526) enseñaba matemáticas en la Universidad de Bolonia y al parecer era bastante competente. Es él quien resuelve un caso especial de la cúbica, a saber,

$$x^3 + px = q\,, \tag{3.1}$$

donde p y q son enteros positivos. Recordemos que en ese tiempo todavía no se acostumbraba escribir una ecuación con coeficientes negativos; además, el álgebra era de tipo retórico por lo que (3.1) en realidad era conocida como *el cubo y la cosa igual a un*

[15] Sobre las revoluciones de las esferas celestes.
[16] Sobre la estructura del cuerpo humano.
[17] El arte magno o las reglas del álgebra.

número, y el método para resolverlas se expresaba también en forma verbal. Este logro de del Ferro es notable pues el problema, en su forma general, había estado sin solución desde los tiempos de Arquímedes, quien pudo resolver ecuaciones cúbicas por métodos geométricos. Además, algunos otros también habían resuelto casos particulares de (3.1).

Desafortunadamente, del Ferro nunca publicó sus resultados pero, antes de su muerte, reveló el método a su yerno, Annibale della Nave, y a su discípulo Antonio María Fior, quien, de regreso a su natal Venecia, pretendía formarse un buen nombre como matemático y para ello retó a una contienda matemática a Niccolo Fontana, un profesor de matemáticas que impartía clases particulares en esa ciudad.

Niccolo Fontana (1499-1557), nativo de Brescia, que en ese tiempo pertenecía a la República de Venecia, era mejor conocido por el sobrenombre de *Tartaglia*, que significa tartamudo, pues tenía dificultades para hablar a causa de severas heridas que le afectaron su paladar cuando tenía apenas 12 años. Sin embargo, tenía gran habilidad para las matemáticas, las que aprendió de manera autodidacta, y eso le permitió ganar muchas competencias en esta disciplina, lo que le valió para hacerse de cierta reputación y así poder ganarse la vida como instructor.

En ese tiempo eran muy comunes las contiendas entre académicos en las que se proponían problemas que debían ser resueltos por los participantes; sabemos de varios matemáticos que alguna vez tomaron parte en este tipo de competencias (Fibonacci, por ejemplo). Además, a veces estas contiendas eran verdaderos duelos intelectuales en los que cada contrincante debía resolver los problemas propuestos por el otro y los premios consistían, generalmente, en sumas considerables de dinero, ni qué decir del prestigio y reputación que los ganadores adquirían.

Así pues, Fior se ufanaba de poder resolver el problema del *cubo y la cosa igual a un número*, por lo que retó a Tartaglia a un duelo matemático en el cual cada uno propondría 30 problemas, y se estableció el 13 de febrero de 1535 como la fecha en la que se debatirían públicamente las respuestas. Se acordó también que el perdedor pagaría con un banquete para 30 personas. Al parecer, Fior estaba tan seguro de su triunfo que quería festejarlo con sus amigos.

Tartaglia pronto advirtió que los problemas propuestos por Fior eran de un mismo tipo pues en todos era necesario resolver el problema del *cubo y la cosa igual a un número*, esto es, se requería obtener las soluciones de una ecuación de la forma (3.1).

De acuerdo con el testimonio de Tartaglia, sólo unos cuantos días antes del plazo fijado, y en un momento de verdadera inspiración, pudo dar con la solución del problema y así fue capaz de responder a todas las preguntas propuestas por Fior, quien por el contrario, no pudo resolver satisfactoriamente las cuestiones planteadas por su contrincante, quedando en entredicho su habilidad matemática. Para todos fue claro quién había sido el ganador de la contienda y Tartaglia desdeñó cobrar el premio pues la humillación pública sufrida por Fior era recompensa más que suficiente.

La fama del bresciano se acrecentó, pues los pormenores de la contienda pronto se propagaron y se fue esparciendo la noticia en los medios académicos de que ya era posible resolver al menos un caso especial de la cúbica.

Por otra parte, Tartaglia decidió mantener en secreto su método y, al parecer, tenía intenciones de escribir un libro sobre el tema. Sin embargo, movido por sus intereses en cuestiones de balística, en 1537 publica su libro *La nuova scientia* en el cual intenta dar respuesta a muchas de las interrogantes que se tenían en ese tiempo relacionadas con las recién inventadas armas de artillería.

Por esa misma época, Girolamo Cardano preparaba el manuscrito para su libro *Practicae Arithmeticae Generalis* y se enteró de la competencia entre Fior y Tartaglia, así como del resultado de la misma. En 1539, Cardano contactó a Tartaglia a través de un intermediario, con el objetivo de que le fuera revelado el método del *cubo y la cosa*, y al mismo tiempo, obtener el permiso para incluirlo en su libro.

La respuesta que obtuvo fue negativa pero siguió insistiendo hasta que Tartaglia aceptó la invitación de aquél para visitarlo en su casa de Milán. Debemos decir que ante tanta insistencia, las cosas llegaron a ponerse algo tensas entre los dos; sin embargo, el cambio de actitud de Tartaglia se debió a que Cardano le había prometido presentarlo al comandante en jefe de Milán, Alfonso de Avalos, con quien supuestamente había comentado el brillante trabajo del bresciano. Así, Tartaglia vió una oportunidad única de presentarle sus inventos de artillería a la máxima autoridad de Milán, la cual podría darle un cambio positivo a su vida.

Antes de proseguir con el desenlace de esta historia es oportuno hacer algunos apuntes sobre Cardano pues es interesante conocer un poco más sobre la vida de este multifacético personaje: Nació hacia 1501 en Pavía, en ese tiempo perteneciente al ducado de Milán, su padre ejercía la abogacía en la ciudad de Milán y era también profesor de matemáticas en la Fundación Piatti de esa población; además, solía dar clases de geometría en la Universidad de Pavía.

Girolamo Cardano fue iniciado en las matemáticas por su padre pero estudió medicina en Pavía, aunque por razones de la guerra, tuvo que terminar sus estudios en Padua. Era aficionado a las apuestas y a los juegos de azar, lo que le trajo una mala reputación. En 1525, habiendo obtenido su doctorado en medicina, solicitó su admisión al Colegio de Médicos de Milán pero le fue negado el ingreso. Empezó a ejercer la medicina en una ciudad cercana y en 1532 solicitó de nuevo su admisión al Colegio y fue nuevamente rechazado.

Con muchas deudas, se dedicó de nuevo al juego pero no tuvo la fortuna necesaria, por lo que se mudó a Milán, donde fue aceptado como profesor de matemáticas en la misma posición de su padre, en la Fundación Piatti.

Como médico era muy competente y ante la negativa de sus colegas de aceptarlo como uno de los suyos y así poder ejercer en Milán, publicó en 1536 un libro en el cual criticaba las prácticas médicas de la época y a los propios miembros del Colegio. Para su sorpresa, en

1537 fue admitido al Colegio, quizá por la presión que sobre éste ejercieron los admiradores de Cardano, quien no sólo era versado en medicina y matemáticas sino que llegó a escribir sobre filosofía, astronomía y teología.

Como ya hemos dicho, Cardano estableció contacto con Tartaglia y en marzo de 1539 éste viajó a Milán, hospedándose en la casa del primero quien lo trató como a un visitante distinguido. Es aquí donde iniciaron los eventos que darían lugar a una amarga controversia relacionada con la autoría del método para resolver la cúbica.

Es imposible hacer un recuento preciso de los hechos pues hemos de guiarnos por los escritos al respecto que no dejaron los dos involucrados. Así, Cardano admite que debido a su mucha insistencia, Tartaglia accedió a revelarle el método. Sin embargo, éste nos dice que le hizo jurar a su anfitrión que nunca revelaría el método bajo ninguna circunstancia y por ningún motivo, a lo que Cardano estuvo de acuerdo y dio su palabra de honor de que respetaría el acuerdo. Después de esto no se sabe qué sucedió, pero Tartaglia abandonó Milán a toda prisa y sin haberse entrevistado con el gobernador.

Por otra parte, la forma en que Tartaglia reveló a Cardano su método para resolver el problema del *cubo y la cosa igual a un número* no era del todo clara pues lo hizo en versos cifrados, que enseguida reproducimos, y el bresciano afirma haberle dado una explicación completa a Cardano, aunque éste menciona que aquél se guardó la demostración. Esto no lo sabemos a ciencia cierta pero los versos, a los que hemos añadido un intento de traducción, son los siguientes[18]:

Quando chel cubo con le cose appresso	Cuando el cubo junto con la cosa	A
Se aggualia à qualche numero discreto	Se iguala a cualquier número discreto	
Trouan dui altri differenti in esso	Encuentra dos números que difieran en eso	B
Dapoi terrai questo per consueto	Después tendrás esto por costumbre:	
Che'l lor produtto sempre sia eguale	Que su producto siempre sea igual	C
Al terzo cubo delle cose neto,	Al cubo del tercio de [el coeficiente de] la cosa	
El residuo poi suo general	Entonces su residuo general	
Delli lor lati cubi ben sustratti	De sus lados cúbicos que han sido restados	D
Varra la tua cosa principale.	Te dará la cosa principal.	E

Hemos numerado los versos para escribirlos en lenguaje algebraico, pero recordemos que en el tiempo del que estamos hablando, el álgebra era de tipo retórico, es decir, no se había desarrollado todavía una notación adecuada. Así, A equivale a la ecuación $x^3 + px = q$. En B necesitamos encontrar dos números u y v tales que $u - v = q$; pero de acuerdo con C, estos números también deben satisfacer $uv = \left(\frac{p}{3}\right)^3$. Finalmente, D y E nos dan $x = \sqrt[3]{u} - \sqrt[3]{v}$. Más adelante explicaremos esta fórmula pues ahora debemos continuar con nuestra historia.

Como ya mencionamos, Tartaglia afirma haberle dado una explicación completa del método a Cardano, pero éste nos dice en el *Ars Magna* que Tartaglia se quedó con la

[18] Tomados de David Eugene Smith[9, p. 461].

demostración por lo que tuvo que darse a la tarea de buscarla por sí mismo, lo cual le resultó difícil, aunque después de varios intentos pudo establecer la demostración.
La regla que Cardano da en su Ars Magna es la siguiente: *Elevas al cubo un tercio del coeficiente de la cosa; sumas a lo obtenido el cuadrado de la mitad de la constante de la ecuación; tomas la raíz cuadrada de todo esto. Duplicarás esto y a uno de los dos agregas la mitad del número que ya elevaste al cuadrado y de lo otro restas la mitad de lo mismo. Tendrás entonces su* binomio *y su* apotoma*. Entonces, sustraes la raíz cúbica de la apotoma de la raíz cúbica del binomio; el residuo o lo que es dejado es el valor de la cosa*.

Esta regla es demostrada por Cardano y enseguida la ilustra con varios ejemplos. Reproducimos ahora uno de ellos. El problema es encontrar la *cosa* si el *cubo y seis veces la cosa hacen veinte*. Esto es, debemos resolver la ecuación

$$x^3 + 6x = 20.$$

De acuerdo con la regla anterior, Cardano procede más o menos en los siguientes términos: Un tercio de 6 es 2 y elevado al cubo obtenemos 8. La mitad de la constante de la ecuación es 10 y lo elevamos al cuadrado por lo que se obtiene 100; sumamos esto con lo anterior y se obtiene 108; luego, tomamos la raíz cuadrada de esto que es $\sqrt{108}$. Duplicamos: A $\sqrt{108}$ le agregamos 10, que es la mitad de 20: $\sqrt{108}+10$ y esto es el *binomio*; luego le restamos el mismo número anterior: $\sqrt{108}-10$ y esto es la *apotoma*. Tomamos la raíz cúbica de cada uno de ellos: $\sqrt[3]{\sqrt{108}+10}$ y $\sqrt[3]{\sqrt{108}-10}$. Por lo tanto, el valor de la *cosa* es $\sqrt[3]{\sqrt{108}+10}-\sqrt[3]{\sqrt{108}-10}$. Notemos que si $u=\sqrt{108}+10$ y $v=\sqrt{108}-10$, entonces $u-v=20$ como lo establece el método de Tartaglia, y además $uv=2^3$; finalmente la solución es de la forma $x=\sqrt[3]{u}-\sqrt[3]{v}$, tal y como se explicó anteriormente.

Cardano no dice nada de las otras raíces de la ecuación para este ejemplo pues la anterior es la única *verdadera* ya que las raíces negativas o complejas no eran consideradas como tales. Un ejercicio interesante para el lector es comprobar que esta solución es en realidad igual a 2 y que las otras raíces son $-1+3i$ y $-1-3i$.

Por otra parte, el verdadero mérito de Cardano es que no sólo se avocó a resolver problemas de este tipo sino que, una vez demostrada la regla anterior, empezó a investigar los otros casos de la cúbica y tuvo éxito en resolver todos los casos posibles. Así para el problema de *el cubo igual a la cosa y un número*, es decir, una ecuación del tipo

$$x^3 = px + q, \tag{3.2}$$

Cardano da la regla siguiente: *Cuando el cubo de la tercera parte del coeficiente de la cosa no es más grande que el cuadrado de la mitad de la constante de la ecuación, restas el primero de estos números de este último y agregas la raíz cuadrada de esta resta a la mitad de la constante de la ecuación y, de nuevo, réstalo de la misma mitad, y tendrás, como se dijo, un binomio y su apotoma, la suma de las raíces cúbicas de los cuales constituyen el valor de la cosa.*

Por ejemplo, explica Cardano, si se tiene que *el cubo es igual a seis veces la cosa más cuarenta* ($x^3 = 6x + 40$), entonces elevamos 2, que es un tercio del coeficiente de la *cosa*, al cubo y nos da 8; lo restamos de 400 que es el cuadrado de 20, la mitad de la constante de la ecuación, y se obtiene 392; la raíz cuadrada de lo cual, sumada con 20, es $20+\sqrt{392}$ (el binomio), y restado de 20 nos da $20-\sqrt{392}$ (la apotoma); la suma de las raíces cúbicas de estos es $\sqrt[3]{20+\sqrt{392}}+\sqrt[3]{20-\sqrt{392}}$, que es el valor de la cosa.

Notemos que en este caso, si hacemos $u=20+\sqrt{392}$ y $v=20-\sqrt{392}$, entonces la suma $u+v$ es la que nos da el coeficiente de x y se cumple también que $uv=\left(\frac{p}{3}\right)^3=8$. La solución es entonces $x=\sqrt[3]{u}+\sqrt[3]{v}$. Al igual que en el ejemplo anterior, no se discuten más soluciones. Le dejamos al lector encontrar las otras dos raíces de esta ecuación.

Otra cuestión importante a observar en este caso es la restricción que se impone a la diferencia $(\frac{q}{2})^2-(\frac{p}{3})^3$, la cual debe ser no-negativa pues es necesario tomar la raíz cuadrada de este número.

Otros casos de la cúbica son analizados por Cardano pero cuando trata el problema de *el cubo y el cuadrado iguales a un número* es interesante observar cómo reduce esta ecuación a una cúbica en la que no aparece el término cuadrático, pues éste se elimina al hacer las operaciones adecuadas. En efecto, la regla que da Cardano para resolver este problema (en forma verbal, por supuesto), es equivalente a lo siguiente: Si se tiene la ecuación

$$x^3+px^2=q\,,$$

entonces hacemos la sustitución $x=y-\frac{p}{3}$ y después de hacer todas las operaciones necesarias, obtenemos la cúbica, sin término cuadrático,

$$y^3=[q-2(\tfrac{p}{3})^3]+3(\tfrac{p}{3})^2y\,,$$

la cual se resuelve para y pues se ha reducido a uno de los casos ya conocidos. Una vez obtenidos los valores de y, es directo obtener los de x en la ecuación original.

De entre los varios ejemplos dados por Cardano para ilustrar este caso, tomamos el que es equivalente a resolver la ecuación $x^3+6x^2=100$. Haciendo la sustitución anterior se obtiene la ecuación $y^3=84+12y$, por lo que $y=\sqrt[3]{42+\sqrt{1700}}+\sqrt[3]{42-\sqrt{1700}}$. De esta manera, $x=\sqrt[3]{42+\sqrt{1700}}+\sqrt[3]{42-\sqrt{1700}}-2$.

Otro caso interesante es el problema del cubo, el cuadrado y la cosa igual a un número, el cual, al igual que el anterior, se reduce a uno donde no aparezca el término cuadrático. Cardano presenta varios ejemplos de este tipo de ecuación y uno que llama la atención es el siguiente: *Un oráculo le ordenó a un príncipe construir un edificio sagrado cuyo espacio debería ser de 400 cubits, del cual lo largo debe ser seis más que lo ancho y lo ancho tres más que la altura. Se deben encontrar estas cantidades.*

La solución dada es equivalente a lo siguiente: Si x es la altura, entonces lo ancho es $x+3$ y lo largo $x+6$, por lo que se obtiene la ecuación

$$x^3+12x^2+27x=400,$$

de la cual se elimina el término cuadrático y resulta la cúbica

$$y^3 = 21y + 380,$$

de donde $y = \sqrt[3]{190 + \sqrt{35757}} + \sqrt[3]{190 - \sqrt{35757}}$, lo cual nos da el valor de *x*: $x = \sqrt[3]{190 + \sqrt{35757}} + \sqrt[3]{190 - \sqrt{35757}} + 4$.

En total, son 13 casos de la cúbica los que son analizados y resueltos por Cardano, así como también otros casos derivados de ellos. Un ejemplo, que equivale a resolver la ecuación

$$x^3 + 21x = 9x^2 + 5,$$

es de llamar la atención, pues se reduce a $y^3 + 4 = 6y$, y en las propias palabras de Cardano: *"...Por lo tanto, hay tres soluciones para este problema: la primera es 2, la segunda es* $\sqrt{3} - 1$, *y la tercera, que es falsa, es* $-(\sqrt{3} - 1)$. *Suma esto a 3, un tercio del coeficiente del cuadrado, y tendrás estas soluciones verdaderas: (1ª) 5; (2ª) 2+* $\sqrt{3}$ *; (3ª)* $2 - \sqrt{3}$ *…"*

En el siguiente ejemplo se trata de resolver el problema equivalente a la ecuación

$$x^3 + 26x = 12x^2 + 12,$$

la cual se reduce a $y^3 = 22y + 36$; en este caso, Cardano apunta: "*Por lo tanto habrá tres soluciones, la primera de las cuales es* $\sqrt{19} + 1$ *y es verdadera; la segunda es falsa y es* $-(\sqrt{19} - 1)$ *; y la tercera es también falsa y es* -2 *. Suma estas individualmente a la tercera parte del coeficiente del cuadrado, y tendrás tres soluciones las cuales son: (1ª)* $5 + \sqrt{19}$ *; (2ª)* $5 - \sqrt{19}$ *; (3ª)* 2 *…*"

Enseguida Cardano da una explicación muy interesante: "*De esto es evidente que el coeficiente del cuadrado, en los tres ejemplos en los cuales hay tres soluciones para la cosa, es siempre la suma de las tres soluciones*…" Esta es la primera vez que alguien menciona este hecho, el cual tiene que ver con los llamados polinomios simétricos elementales. En efecto, si suponemos que las raíces de la cúbica general

$$x^3 + ax^2 + bx + c = 0 \tag{3.3}$$

son X_1, X_2 y X_3, donde *a, b, c* son números racionales (por ahora), entonces

$$\begin{aligned} x^3 + ax^2 + bx + c &= (x - X_1)(x - X_2)(x - X_3) \\ &= x^3 - (X_1 + X_2 + X_3)x^2 + (X_1X_2 + X_1X_3 + X_2X_3)x^2 - X_1X_2X_3 \end{aligned}$$

de donde se sigue que

$$\begin{aligned} X_1 + X_2 + X_3 &= -a, \\ X_1X_2 + X_1X_3 + X_2X_3 &= b, \\ X_1X_2X_3 &= -c. \end{aligned}$$

Las expresiones a la izquierda del signo de igualdad se llaman los *polinomios simétricos elementales* de las raíces X_1, X_2 y X_3. Estos polinomios son importantes y al generalizarlos para el caso de una ecuación algebraica de grado *n*, se siguen cumpliendo relaciones análogas entre los coeficientes de la ecuación y sus raíces.

Para resolver la ecuación (3.3) en forma general, procedemos más o menos como se ha hecho en los diferentes ejemplos que se han presentado. Primero, por medio de la sustitución $x = y - \frac{a}{3}$, (3.3) se convierte en una ecuación de la forma

$$y^3 + py + q = 0\,. \tag{3.4}$$

Si vemos los casos anteriores, por ejemplo (3.2), entonces podemos proponer una solución de la forma $y = \sqrt[3]{u} + \sqrt[3]{v}$ para (3.4); luego,

$$\begin{aligned} y^3 = \left(\sqrt[3]{u} + \sqrt[3]{v}\right)^3 &= u + v + 3\sqrt[3]{u}\sqrt[3]{v}\left(\sqrt[3]{u} + \sqrt[3]{v}\right) \\ &= (u+v) + 3\sqrt[3]{u}\sqrt[3]{v}\,y\,, \end{aligned}$$

es decir,

$$y^3 - 3\sqrt[3]{u}\sqrt[3]{v}\,y - (u+v) = 0\,,$$

por lo que comparando con (3.4) se debe tener

$$\begin{aligned} u + v &= -q \\ \sqrt[3]{u}\sqrt[3]{v} &= -\tfrac{p}{3}\,. \end{aligned} \tag{3.5}$$

Podemos escribir esta última condición como

$$uv = -(\tfrac{p}{3})^3\,, \tag{3.5}$$

y se sigue, de las relaciones para los polinomios simétricos en las variables *u* y *v*, que las raíces de la ecuación cuadrática

$$z^2 + qz - (\tfrac{p}{3})^3 = 0\,,$$

son precisamente *u* y *v*, pues de (3.4) y (3.5), se tiene

$$(z-u)(z-v) = z^2 - (u+v)z + uv = z^2 + qz - (\tfrac{p}{3})^3 = 0\,.$$

Pero si resolvemos la ecuación cuadrática se tiene

$$z = \frac{-q \pm \sqrt{q^2 + 4(\frac{p}{3})^3}}{2} = -\frac{q}{2} \pm \sqrt{\frac{q^2}{4} + \frac{p^3}{27}}\,,$$

por lo que

$$u = -\tfrac{q}{2} + \sqrt{\tfrac{q^2}{4} + \tfrac{p^3}{27}} \qquad \text{y} \qquad v = -\tfrac{q}{2} - \sqrt{\tfrac{q^2}{4} + \tfrac{p^3}{27}}\,.$$

Como habíamos propuesto la solución de (3.4) en la forma $y = \sqrt[3]{u} + \sqrt[3]{v}$, se sigue que

$$y = \sqrt[3]{-\tfrac{q}{2} + \sqrt{\tfrac{q^2}{4} + \tfrac{p^3}{27}}} + \sqrt[3]{-\tfrac{q}{2} - \sqrt{\tfrac{q^2}{4} + \tfrac{p^3}{27}}}\;;$$

ésta es una solución de (3.4) y se le llama *fórmula de Cardano*. Notemos que, ya teniendo una raíz, es fácil encontrar las otras dos y las raíces de la cúbica general (3.3) se obtienen mediante $x = y - \frac{a}{3}$.

Por otra parte, para el año 1543, seguramente Cardano ya estaba convencido de que si Fiore había aprendido a resolver el caso del cubo y la cosa, era debido a que del Ferro se lo había enseñado. Así, él junto con su discípulo Ludovico Ferrari (1522-1565), viajaron a Bolonia y se entrevistaron con Annibale della Nave quien les dió permiso para hurgar entre las notas de su suegro. Encontraron suficiente evidencia que los convenció de lo que suponían: el primero en descubrir el método para resolver el problema de *el cubo y la cosa* había sido del Ferro, alrededor de 1515.[19] De esta manera, si es que era cierto que Cardano había jurado a Tartaglia mantener el método en secreto, aquél quizá no se sintió obligado a seguir guardando algo que otros también sabían. Además, Cardano por sí mismo había hecho contribuciones propias al problema de la cúbica, así que no había razones válidas para no publicar esos resultados.

Así, de regreso en Milán, Cardano empieza a preparar el material para su *Ars Magna*, el cual vendría a ser una piedra angular y a ejercer una influencia significativa en el desarrollo del álgebra moderna.

Los comentarios que hemos hecho y los ejemplos que hemos revisado de este libro, son relevantes; sin embargo, para darnos una idea mejor sobre la gran contribución de Cardano al desarrollo del álgebra, comentaremos algunos otros que merecen atención especial.

Tal es el caso de varios problemas que involucran cantidades de dinero y cuyas soluciones son enteros negativos, a las que Cardano identifica con faltantes o débitos. Por ejemplo: "*La dote de la esposa de Francis es 100 aurei más que la propiedad de Francis, y el cuadrado de la dote es 400 más que el cuadrado de su propiedad. Encontrar la dote y la propiedad*".

Si denotamos por x la dote y por y la propiedad de Francis, se obtienen las ecuaciones $x = y + 100$ y $x^2 = y^2 + 400$; al resolver este sistema encontramos $y = -48$, que es el faltante de Francis para que sumado con 100 sea igual a la dote de su esposa, que es $x = 52$. En sus propias palabras nos dice: *"... Trabajando de esta manera, tú puedes resolver los problemas más difíciles e inextricables*".

Todavía más interesante es el siguiente problema: "*Divide 10 en dos partes, el producto de las cuales es 40*". Si x es una parte, la otra es $10 - x$, por lo que se requiere resolver la ecuación $x^2 - 10x + 40 = 0$, de la cual Cardano da las soluciones correctas: $5 + \sqrt{-15}$ y $5 - \sqrt{-15}$; enseguida demuestra que efectivamente lo son. Además, declara: "… *Dejando a un lado las torturas mentales involucradas, multiplica* $5 + \sqrt{-15}$ *por* $5 - \sqrt{-15}$, *que hacen* $25 - (-15)$ *lo cual da* $+15$. *De aquí que el producto es* 40", y es así el primero en realizar una multiplicación con números complejos, aunque está muy lejos de imaginar el incalculable valor del tesoro que ha descubierto pues agrega más adelante: "… *Esto es verdaderamente sofisticado, dado que con ello uno no puede realizar las operaciones que sí son posibles en el caso de un negativo puro…*"

Otra de las aportaciones invaluables del *Ars Magna* tiene que ver con el método para resolver la ecuación de cuarto grado o bicuadrática y el crédito de su descubrimiento es para Ludovico Ferrari, como el mismo Cardano nos lo hace saber.

[19] Esto ha sido confirmado por el hallazgo de las notas de del Ferro en la Biblioteca de la Universidad de Bolonia.

Ferrari, a quien Cardano tenía en muy alta estima, empezó sirviendo en la casa de éste en 1536, a la edad de 14 años. Aprendió muy bien las matemáticas y llegó a ser un brillante matemático, aunque muy conflictivo, pues era de un carácter muy impulsivo.

Fue él quien descubrió que la ecuación de cuarto grado se podía resolver por un método que requería encontrar las soluciones de una ecuación cúbica auxiliar. Cardano nos explica el método y considera 20 expresiones diferentes para la bicuadrática (aunque admite que hay muchos más), pues como hemos venido insistiendo, no era costumbre usar coeficientes negativos en una ecuación por lo que se tenían que abordar los diferentes casos. Por ejemplo, ecuaciones que nosotros escribiríamos como $x^4 + ax^3 + bx^2 = d$, $x^4 + d = ax^3 + bx^2$, $x^4 + ax^3 + d = bx^2$, etcétera, eran consideradas distintas por los algebristas de esa época.

En los ejemplos que se resuelven en el *Ars Magna* queda claro el método de Ferrari, el cual aplicaremos, sin adentrarnos demasiado en los detalles, al caso general de la ecuación de cuarto grado:

$$x^4 + ax^3 + bx^2 + cx + d = 0, \tag{3.4}$$

donde a,b,c,d son números que por ahora suponemos racionales.

Primero se elimina el término cúbico de la ecuación a través de la sustitución $x = y - \frac{a}{4}$, y se obtiene una ecuación de la forma

$$y^4 + py^2 + qy + r = 0 .$$

Seguidamente, se introduce un parámetro α y expresamos esta última ecuación como

$$(y^2 + \tfrac{p}{2} + \alpha)^2 = 2\alpha y^2 - qx + (\alpha^2 + p\alpha - r + \tfrac{p^2}{4}) . \tag{3.5}$$

Luego, es posible tomar α de tal manera que el lado derecho del signo de igualdad en (3.5) sea un cuadrado perfecto; para que esto sea posible, α debe ser raíz de la ecuación cúbica auxiliar

$$8\alpha^3 + 8p\alpha^2 + (2p^2 - 8r)\alpha - q^2 = 0,$$

la cual podemos resolver usando la fórmula de Cardano.

Una vez obtenida una raíz α_0 de esta cúbica, (3.5) se puede expresar como

$$(y^2 + \tfrac{p}{2} + \alpha_0)^2 = 2\alpha_0 (y - \tfrac{q}{4\alpha_0})^2,$$

por lo que

$$(y^2 + \tfrac{p}{2} + \alpha_0) = \pm\sqrt{2\alpha_0}\,(y - \tfrac{q}{4\alpha_0}) .$$

Estas son dos ecuaciones cuadráticas para y, por lo que obtenemos cuatro soluciones, las cuales sustituimos en $x = y - \frac{a}{4}$, para obtener las cuatro raíces de (3.4).

Es obvio que esta forma de tratar a la ecuación (3.4) es distinta a como lo hacían los algebristas italianos del siglo XVI, pero en esencia, los métodos son los mismos.

Cuando el *Ars Magna* sale a la luz pública en 1545, Tartaglia tiene conocimiento de este hecho y puesto que viene resuelta la ecuación cúbica, monta en cólera y le reclama su proceder a Cardano, no obstante que éste da el debido crédito a todos los involucrados. Por

ejemplo, al inicio del primer capítulo escribe: *En nuestros días, Scipione del Ferro de Bolonia ha resuelto el caso del cubo y la cosa iguala un número, un logro muy elegante y admirable… Emulándolo, mi amigo Niccolo Tartaglia de Brescia, no queriendo ser menos, resolvió el mismo caso cuando compitió con su pupilo, Antonio María Fiore, y movido por mis muchos ruegos me dio la solución a mí*.
También en el capítulo XI, al presentar el método del *cubo y la cosa*, Cardano vuelve a repetir estas palabras de reconocimiento para ambos, así que la ira de Tartaglia no tenía razón de ser, máxime que, como hemos dicho, Cardano había encontrado la solución para todos los otros casos de la cúbica. Así, y de acuerdo con los estándares modernos, el crédito dado es más que suficiente.

Desgraciadamente, los dimes y diretes entre estos dos personajes duraron bastante tiempo y Ferrari entró también en la disputa, en defensa de su maestro. Sabemos que éste tenía un gran talento matemático y el enfrentamiento llegó tan lejos que Tartaglia lo retó a duelo aunque su verdadera intención era debatir con Cardano, que para ese tiempo estaba en el pináculo de la fama. De la competencia entre Ferrari y Tartaglia, sabemos que éste último la perdió de una manera poco decorosa, y el rencor y la amargura se apoderaron de su espíritu, para mayor desgracia suya y de las matemáticas.

En esta historia, algunos autores han tomado partido por Tartaglia y han acusado a Cardano de plagio, cosa muy distante de la realidad, pues la competencia de éste último como matemático está fuera de toda duda. En todo caso, Tartaglia representa el oscurantismo medieval y Cardano el iluminismo del renacimiento por lo que son absurdas esas acusaciones.

Podemos decir que el *Ars Magna* marca un antes y un después en la historia del desarrollo del álgebra y Cardano debe ser considerado una figura central en este proceso. Más aún, entre el *al-jabr* de al-Juarismi y el *Ars Magna*, no hay otro tratado con tanta influencia como éste último.

Por otra parte, el tener métodos para encontrar las soluciones de las ecuaciones de tercero y cuarto grados por medio de radicales fue un paso enorme y significó un gran avance para las matemáticas en general y estableció las bases para el advenimiento del álgebra moderna.

Posteriores al trabajo de Cardano aparecen otros que tratan sobre la ecuación cúbica. Tal es el caso de Nicolas Petri, de Daventer, quien en 1567 publicó su trabajo en el cual da alguna atención a esta ecuación, y resuelve algunos casos particulares tales como $x^3 = 9x + 28$, $23x^3 + 32x = 905\frac{5}{9}$, $x^3 = 3x^2 + 5x + 16$, en los cuales utiliza el método de Cardano. En ese mismo año, aparece otro trabajo en Antwerp de título *Libro de algebra en arithmetica y geometria* de Pedro Nuñez. En este trabajo, el autor muestra bastante familiaridad con los trabajos de Tartaglia y Cardano, y considera algunas ecuaciones cúbicas tales como $x^3 + 3x = 36$, $x^3 + 9x = 54$.

Mención aparte merece hacerse del trabajo de un algebrista italiano, Rafaello Bombelli (1526-1573), quien escribió un libro de título *l'Algebra*, publicado en 1572, y que también ejerció bastante influencia en los desarrollos posteriores del área. En esta obra, Bombelli trata de aclarar algunos puntos del *Ars Magna* que le parecen oscuros, sobre todo en lo que respecta al cálculo con números complejos, a los cuales llama *sofisticados*, siguiendo a Cardano.

Otra parte del libro está dedicada al cálculo de radicales, en particular raíces cuadradas y cúbicas de enteros positivos. Por ejemplo $\sqrt{2}$, la expresa como lo que ahora llamamos una fracción continua, que nosotros expresaríamos en la forma

$$\sqrt{2}=1+\frac{1}{2+\frac{1}{2+\frac{1}{2}+\cdots}}\,.$$

En lo que respecta a la solución de ecuaciones, Bombelli aborda en su libro los casos de la cúbica y la bicuadrática. Además, comienza a usar cierto simbolismo que nos recuerda el usado por Chuquet, pero su álgebra es todavía verbal.

Un caso digno de analizar es el de una cúbica que escribiríamos como

$$x^3=15x+4\,.$$

En efecto al aplicar la fórmula de Cardano, encuentra que

$$x=\sqrt[3]{2+\sqrt{-121}}+\sqrt[3]{2-\sqrt{-121}}\,,$$

y como por simple inspección se ve que $x=4$ es una raíz, la ecuación anterior tiene verdadero sentido para él. Sin embargo, lo interesante de su análisis es que trata de darle significado a esta expresión y busca otra forma de escribir los términos que en ella aparecen. Así, se propone encontrar números enteros *a* y *b* que satisfagan

$$\sqrt[3]{2+\sqrt{-121}}=a+\sqrt{-b}\,.$$

Si se elevan al cubo ambos lados de esta expresión, entonces se obtiene

$$\begin{aligned}2+\sqrt{-121}&=a^3+3a^2\sqrt{-b}+3a(\sqrt{-b})^2+(\sqrt{-b})^3\\&=(a^3-3ab)+(3a^2-b)\sqrt{-b}\,;\end{aligned}$$

así, debería cumplirse que $2=a^3-3ab$ y $\sqrt{-121}=(3a^2-b)\sqrt{-b}$, y en consecuencia

$$\sqrt[3]{2-\sqrt{-121}}=a-\sqrt{-b}\,.$$

Bombelli calcula el producto $\left(\sqrt[3]{2+\sqrt{-121}}\right)\left(\sqrt[3]{2-\sqrt{-121}}\right)$ y obtiene

$$\sqrt[3]{125}=a^2+b\,,$$

es decir,

$$b=5-a^2\,,$$

por lo que al sustituir en $2=a^3-3ab$ llega a una ecuación cúbica en *a*:

$$4a^3-15a=2\,,$$

de la cual es fácil calcular la solución $a=2$. Luego, $b=1$, y por lo tanto

$$\sqrt[3]{2+\sqrt{-121}}=2+\sqrt{-1}\,,$$

$$\sqrt[3]{2+\sqrt{-121}}=2-\sqrt{-1}\,,$$

y se obtiene la solución real que ya teníamos pues

$$x=\sqrt[3]{2+\sqrt{-121}}+\sqrt[3]{2-\sqrt{-121}}=(2+\sqrt{-1})+(2-\sqrt{-1})=4\,.$$

Esto es muy significativo y Bombelli expresa: "*Al principio, la cosa me parecía que estaba más basada en sofismas que en verdad, pero busqué hasta que encontré la prueba*" [11, p. 61].

Pero no esto no queda ahí pues introduce una notación para estos números *sofisticados*: llama *più di meno* a $+\sqrt{-1}$ y *meno di meno* a $-\sqrt{-1}$, por lo que al calcular su producto obtiene: *più di meno* via *meno di meno fà meno*[20], es decir, $(+\sqrt{-1})(-\sqrt{-1})=-1$. Esto nos muestra que Bombelli fue un poco más allá que Cardano en su entendimiento de los números complejos.

Es indudable que con estos trabajos se estaba preparando el camino para que el álgebra llegara a ser una rama independiente de las matemáticas, pero se necesitaba primero desarrollar una notación adecuada para que esto pudiera realizarse.

UN PASO IMPORTANTE: LA NOTACIÓN

Ya hemos mencionado en varias ocasiones que el álgebra hasta el siglo XVI era de tipo verbal y hemos visto muchos ejemplos de esto. De hecho, el álgebra del siglo XVI tenía más cosas en común con el álgebra de los árabes que con nuestra moderna álgebra simbólica, en la que la notación que usamos es algo que damos por sentado.

En realidad, el álgebra todavía estaba en ese tiempo muy conectada con la geometría, en el sentido de que para "demostrar" que algún número era solución de un problema algebraico se requería una demostración geométrica como en los trabajos de al-Jwarismi y Cardano, por citar algunos. La incógnita de un problema era pensada como la longitud de un segmento de recta; el cuadrado de la incógnita se refería al área de un cuadrado y su cubo, al volumen de un cubo. Desde esta perspectiva, tanto números negativos como potencias más grandes a tres eran imposibles. Además, un cuadrado no podía ser sumado con un cubo (esto es, no se podía sumar x^2+x^3) debido a que áreas y volúmenes son cantidades de diferente especie y no pueden ser combinadas. Así, el álgebra era todavía un conjunto específico de reglas que eran usadas para resolver ecuaciones particulares.

Un avance importante se dio hacia el final del siglo XVI: el álgebra vino a ser una herramienta muy poderosa pues se le proveyó de un mayor simbolismo. Se introdujo la notación exponencial y lo que se escribía como “A cubus” o “AAA” podría ser ahora escrito como A^3. Los símbolos +, –, = fueron también introducidos. Este último fue propuesto por Robert Recorde pues decía que no hay dos cosas tan idénticas como dos líneas paralelas.

Francisco Vieta, un abogado francés aficionado a las matemáticas empezó a usar vocales para representar variables y consonantes para representar constantes. Esto permitió a los matemáticos representar, por ejemplo, a toda la clase de ecuaciones cuadráticas como $A^2+BA=C$ y esto hizo posible que se pudieran discutir técnicas generales para resolver algunas clases de ecuaciones. De hecho, fue Vieta quien interpretó la cúbica general como

[20] *più di meno* por *meno di meno* hacen menos uno.

una ecuación de la que todos los casos que consideraba Cardano eran ocurrencias particulares. Además, dio un solo método de solución que podía aplicarse a todos los casos.

Si bien el simbolismo algebraico de Vieta no es el que usamos actualmente, sí era uno muy parecido. Así, para nosotros, la ecuación general de tercer grado la escribimos como

$$x^3 + ax^2 + bx + c = 0 \quad , \qquad (3)$$

Vieta procede haciendo la sustitución $x = y - \frac{a}{3}$ y reduciendo la ecuación (3) a la forma

$$y^3 + 3py = 2q \; .$$

Se puede decir, no obstante, que el álgebra de Vieta todavía tiene algo de verbal; por ejemplo, no adoptó el símbolo + sino hasta muy tarde en su vida. Quien vino a cambiar en definitiva el panorama fue Descartes.

Descartes compartía el punto de vista griego de que una variable correspondía a una longitud pero mostró que una variable elevada a cualquier potencia entera correspondía también a la longitud de un segmento de recta que podía ser construido con regla y compás. Esta nueva visión liberó al álgebra de sus limitaciones geométricas y ahora sí podían considerarse expresiones del tipo x^4 y $x^2 + x^3$. Así, Descartes pudo demostrar cómo el álgebra podía ser aplicada a problemas geométricos. El procedimiento era empezar con un problema geométrico, convertirlo en una ecuación, simplificarla algebraicamente y resolver geométricamente la versión simplificada.

REFERENCIAS

[1] Boyer, Carl B. (1991). *A History of Mathematics*. Second Edition, John Wiley and Sons, New York.
[2] Cardano, G. (1993). *Ars Magna or the Rules of Algebra* (Translated by T. Richard Witmer). Dover Publications, Inc., New York.
[3] Edwards, Harold M. *Galois Theory*. Springer.
[4] Johnson, D. B., Mowry, T. A. (1995). *Mathematics, a Practical Odissey*. PWS Publishing Company, Boston.
[5] Karpinski, L. C. (1915). *Robert of Chester's Latin Translation of the Algebra of Al-Khowarizmi*. The MacMillan Company, London.
[6] Serret, J. A. (1885). *Course d'Algebre Superieure*. Gauthier-Villars, Paris.
[7] Smith, David E. (1958). *History of Mathematics*, Volume II. Dover.
[8] Thuillier, P. (1991). *De Arquímedes a Einstein. Las Caras Ocultas de la Invención Científica*, Alianza Editorial, México, D. F.
[11] Varadajan, V. S. (1998). *Álgebra in Ancient and Modern Times*. American Mathematical Society.
[12] Waerden, B. L. van der (1985). *A History of Algebra. From al-Khwarismi to Emmy Noether*. Springer, Berlín.
[13] *Enciclopedia Hispánica* (1992). Enciclopaedia Britannica Publishers, Inc.