EL DESARROLLO DEL ÁLGEBRA MODERNA

Parte I: El álgebra en la antigüedad.

Guillermo Dávila Rascón

... en matemáticas, los grandes progresos han estado siempre ligados a progresos en la capacidad de elevarse un poco más en el campo de la abstracción.

Jean Dieudonné[1]

1. INTRODUCCIÓN

El *álgebra moderna*, o *álgebra abstracta* como también se le conoce, tiene un papel tan importante dentro de las matemáticas contemporáneas que hay quienes lo comparan con la función que la matemática, en general, desempeña en las ciencias, en las que ha probado ser de gran utilidad. Nos referimos a sus aplicaciones a la física, a la química, a la biología, a la economía, etcétera, para las cuales, la matemática es parte fundamental de sus desarrollos modernos, en algunos de los cuales, las nuevas teorías algebraicas han tenido un papel protagónico (ver [1, pp. 57-58, 261-262]).

En este escrito abordaremos algunos de los más importantes episodios que han dado forma al álgebra, tal como la conocemos actualmente, y veremos que está muy alejada de la antigua idea según la cual "*El algebra es, propiamente hablando, el análisis de ecuaciones*" como lo expresa J. A. Serret en su libro *Cours d'Algèbre Supérieure* publicado en 1885. Ciertamente ese análisis de las ecuaciones ha sido una parte muy importante en el desarrollo de esta ciencia, pero tendremos oportunidad de ver que el álgebra es mucho más que eso. De hecho, en las primeras décadas del siglo XIX se dió un movimiento lidereado por varios matemáticos ingleses que tenía como propósito dotar al álgebra de un marco axiomático, similar al de la geometría euclidiana. Esto propició el surgimiento de una multitud de nuevas estructuras y teorías algebraicas que revolucionaron las viejas concepciones y marcaron el camino a seguir para los desarrollos futuros del álgebra moderna.

Por otro lado, debemos advertir que ésta no es una historia exhaustiva de todo ese movimiento creador pues el espacio nos impone limitaciones, sin embargo, pondremos énfasis en ciertos aspectos que nos ayudarán a comprender la relevancia del álgebra en las matemáticas modernas. Además, hemos dividido el documento en tres partes: En la primera de éstas tocamos algunos aspectos de las matemáticas egipcia, babilónica y griega, a los que podríamos calificar como de tipo algebraico, aunque cada uno de ellos de índole muy distinta, como se verá en las siguientes secciones. Esta primera parte abarca un período que empieza aproximadamente en 1600 a. C. y termina alrededor del año 600 d. C.; en esta etapa podemos hablar de una *pre-álgebra* pues aún no se toma conciencia del álgebra como

[1] Ver [7], p. 43.

una área independiente de la aritmética y de la geometría (en el caso de Egipto y Babilonia, podemos hablar de una *álgebra aritmética* y en el caso de Grecia de una *álgebra geométrica*). En ambas situaciones, encontramos problemas muy específicos que podríamos llamar algebraicos y para los cuales tenían métodos de solución que son equivalentes a resolver ciertos tipos de ecuaciones algebraicas y que abordaremos más adelante.

Un desarrollo mucho más consciente y profundo en lo que se refiere al estudio de ecuaciones algebraicas es llevado a cabo por los matemáticos árabes, quienes preservan, aprehenden y cultivan las ciencias que provienen de fuentes babilónicas, hindúes y griegas. Si bien la matemática árabe tiene su período de máximo esplendor entre los siglos IX y XI, su influencia se percibe en Europa hasta muy entrado el Renacimiento, por lo que los matemáticos europeos continúan el estudio de las ecuaciones hasta las primeras décadas del siglo XIX. Así, esta etapa la podemos identificar con la idea expuesta por Serret: El álgebra ligada a la resolución de ecuaciones, y nos ocuparemos de estos aspectos en la segunda parte del documento.

Finalmente, en la tercera parte hablaremos sobre los desarrollos modernos del álgebra que se inician con el surgimiento del álgebra simbólica en Inglaterra y que logran un triunfo significativo con la labor de axiomatización del álgebra por parte de la escuela alemana hacia la mitad del siglo XX. Es en este período donde se marcan las tendencias modernas del desarrollo algebraico, las cuales se centran en una idea fundamental: el concepto de operación o ley de composición, del cual Bourbaki afirma ser uno de los conceptos más primitivos en matemáticas [3, p.74]. Esperamos que con este estudio introductorio sobre la evolución del álgebra, el lector se logre dar una idea del poder del ésta.

No debemos olvidar, por otro lado, que una característica distintiva de las matemáticas es su gran unidad, es decir, es imposible hablar de áreas que evolucionen de manera aislada, o como lo dice David Hilbert : "*La matemática es en mi opinión un todo indivisible, un organismo cuya vitalidad está condicionada por la conexión de sus partes…*" [19]. Por lo tanto, el desarrollo de una área necesariamente marca su impacto en las otras y todas se retroalimentan entre sí. En particular, el álgebra no es ajena a esta tendencia y a lo largo de su desarrollo es posible observar su influencia en otras ramas de la matemática y cómo se ha visto beneficiada por los desarrollos de éstas. Sin embargo, a pesar de que sería muy fructífero asomarnos un poco a este proceso no nos es posible revisar en este documento esas conexiones del álgebra con otras áreas y sólo le pedimos al lector tener en cuenta que el álgebra no ha evolucionado de forma aislada y es posible notar su presencia en la matemática toda.

En la actualidad se tienen bastantes evidencias que nos muestran que al menos desde 1600 a. C., varios de los pueblos que habitaron la Mesopotamia resolvían problemas concretos que involucraban ecuaciones algebraicas de primero, segundo y tercer grados. Por problemas concretos nos referimos a que su matemática tenía un fin utilitario solamente y no se desarrolló como una ciencia autónoma, como sí ocurrió en la antigua Grecia, aunque en este caso fueron la Geometría y la Aritmética (entiéndase Teoría de Números) las que lograron un alto nivel de desarrollo con respecto a las matemáticas de las civilizaciones que les precedieron.

Es en el declinar de la matemática griega, aproximadamente del 250 al 600 d. C., cuando se retoman las antiguas tradiciones de los calculistas de la Mesopotamia y surge de nuevo el interés por la resolución de ecuaciones. Notemos que en ese período el Imperio Romano ya tenía siglos de haberse establecido como la fuerza avasalladora de Europa y Oriente Medio, imponiendo su ley en esas regiones. Sin embargo, la matemática no fue especialmente cultivada por esa civilización, y en general la ciencia, como la concebían los griegos, fue puesta en segundo término por los romanos.

La caída de Roma en el año 476 de nuestra era marca el inicio de la Edad Media, pero esto no significa el fin de la civilización romana pues el nuevo centro del poder viene a ser Constantinopla, y a pesar de los cambios, religiosos sobre todo, pues se adopta el cristianismo como la religión oficial, la cultura hegemónica subyacente es la romana, aunque nace un nuevo imperio, el Bizantino.

Por otra parte, un nuevo movimiento político-religioso se gestaba en el Medio Oriente con el nacimiento del Islam (alrededor de 622 d. C.), y es la civilización árabe la que daría un nuevo impulso, que resultó ser definitivo, al estudio de las ciencias y fueron ellos los que preservaron y cultivaron el legado de los griegos y de otras civilizaciones como la hindú. Además, gracias a que los árabes conquistaron gran parte de la península Ibérica, España se convirtió bajo su dominio en un centro cultural muy importante al que acudían eruditos de varias partes de Europa a nutrirse del conocimiento científico, lo que propició su propagación. De hecho, Euclides, Aristóteles, Platón, Arquímedes, Ptolomeo y muchos otros pensadores griegos fueron conocidos por los escolares medievales por las traducciones que los árabes habían hecho de sus obras y fueron estos académicos europeos los que tradujeron estas obras del árabe al latín y pudieron así ser estudiadas por las generaciones posteriores. Nos atrevemos a decir que sólo esto libró a Europa de un oscurantismo total durante la Edad Media, que termina en el año 1453 con la caída de Constantinopla.

En particular, es a los árabes a quienes debemos el nombre *álgebra*, como veremos en la Sección 2, y fueron ellos los que introdujeron a occidente el sistema de numeración usado en la India; con el tiempo, los numerales evolucionaron hasta convertirse en los que usamos actualmente, pero las ventajas de este sistema posicional de base diez resultó ser fundamental para el avance de las ciencias. Nuestra deuda para con ellos es ciertamente mucho mayor que lo implicado por estos hechos pues su contribución a la ciencia no se limitó únicamente a la preservación y transmisión del conocimiento logrado por otras culturas sino que ellos mismos hicieron aportaciones originales en varias ramas del saber y ciertamente debemos reconocer sus logros.

El auge comercial en la Italia de los siglos XIII y XIV fue determinante para la adopción de los números indo-arábigos en occidente y junto con estos llegaron a la Europa occidental muchos de los tratados científicos de los árabes, mismos que fueron traducidos al latín por los académicos europeos, actividad ésta que tuvo lugar en los monasterios cristianos, principalmente. Fue esta revolución comercial la responsable de que se fundaran *escuelas del ábaco* a finales del siglo XIII. Sin embargo, a medida que se extendía el uso de los numerales indo-arábigos se puso en evidencia que los *maestros algoristas*, aquellos que dominaban las técnicas de operación con estos números, superaban por mucho a los *maestros abacistas* cuando se trataba de hacer cálculos aritméticos. De esta manera, los comerciantes adoptaron su uso y desempeñaron un papel determinante en la propagación de este nuevo sistema.

El álgebra de los árabes encajó perfectamente en este ambiente pues estaba orientada a resolver problemas por métodos aritméticos que involucraban, en la mayoría de los casos, ecuaciones lineales (primer grado) y cuadráticas (segundo grado). Muchos de esos problemas trataban sobre la repartición de herencias, transacciones comerciales, medida de terrenos, etcétera (*lo que los hombres constantemente requieren ... en todos sus tratos entre ellos*...[2]). Así, el álgebra se convirtió en una herramienta indispensable para los comerciantes; ya para el siglo XIV los que antes eran los *maestros del ábaco* se convirtieron en *algebristas* y además fueron capaces de hacer contribuciones originales en esta área. Algunas de esas aportaciones tenían que ver con la solución de ecuaciones cúbicas (tercer grado) y bicuadráticas (cuarto grado) particulares, relacionadas con problemas prácticos muy específicos.

Esto llevó de forma natural a la búsqueda de métodos que funcionaran para cualquier tipo de ecuación cúbica o de cuarto grado, pues el álgebra árabe ya había dado cuenta de los distintos tipos de ecuaciones de cuadráticas y se tenían métodos generales para resolverlas, que consistían en completar el cuadrado. Aquí debemos señalar que el álgebra en esta época era de carácter *retórico* pues no se tenía la notación simbólica a la que estamos acostumbrados; además, las soluciones de una ecuación sólo podían ser positivas o cero pues no se tenía idea de los números negativos, que fueron introducidos hasta mucho tiempo después. Damos un ejemplo para ilustrar este punto, el cual está tomado del libro de álgebra de al-Juarismi, del cual hablaremos más adelante:

El siguiente es un ejemplo de cuadrados y raíces[3] *iguales a números: un cuadrado y 10 raíces son iguales a 39 unidades. La cuestión en este tipo de ecuación es como sigue: ¿Cuál es el cuadrado que combinado con diez de sus raíces dará una suma total de 39? La manera de resolver este tipo de ecuación es tomar la mitad de las raíces ya mencionadas. Ahora, las raíces del problema son 10. Por lo tanto, toma 5, que multiplicado consigo mismo da 25, una cantidad que agregas a 39, y lo cual da 64. Habiendo tomado entonces la raíz cuadrada de esto la cual es 8, resta de esto la mitad de las raíces, 5, lo que deja 3. El número 3 representa por tanto una raíz de este cuadrado, mismo que es, por supuesto, 9. Nueve por lo tanto da ese cuadrado.*

Notemos que la forma de proceder de al-Juarismi para resolver este problema es completar el cuadrado perfecto. En efecto, si traducimos este problema y su solución a nuestra moderna notación simbólica vemos que en él se pide resolver la ecuación $x^2 + 10x = 39$ para x^2. Procedemos de la siguiente manera: completamos el trinomio, $x^2 + 10x + (\frac{1}{2} \cdot 10)^2 = 39 + (\frac{1}{2} \cdot 10)^2$, lo cual nos da $x^2 + 10x + 25 = 64$, esto es, $(x+5)^2 = 8^2$, por lo que $x + 5 = 8$. Así, $x = 8 - 5 = 3$. Por lo tanto, $x^2 = 9$.

Por otra parte, es oportuno señalar que no se confiaba en estas soluciones si no estaban justificadas geométricamente pues el álgebra en ese tiempo no era concebida como una

[2] Tomado del Prólogo del libro *Hisãb al-jabr w'al-muqãbalah* del matemático árabe Mohammed ibn Musa, al-Juarismi.

[3] Por cuadrado se refiere al área de un cuadrado y una raíz significa el lado del cuadrado.

rama independiente de las matemáticas y la única ciencia segura, enteramente deductiva, era la geometría, lo cual se pone de manifiesto en los *Elementos* de Euclides, que los matemáticos árabes conocían muy bien y que eran el paradigma a seguir por todo conocimiento que pretendiera llamarse ciencia. Así, el álgebra árabe y posteriormente el álgebra de la escuela italiana estaban muy influenciadas por el pensamiento geométrico griego. Tan grande era esa influencia que los números se entendían o bien como longitudes de segmentos de recta, o como áreas o volúmenes.

Este estado de cosas continuó hasta muy entrado el siglo XVI y se empezaron a dar cambios importantes cuando se introdujo una nueva notación que poco a poco llevaría el álgebra de lo verbal a lo simbólico, y se le daría el reconocimiento a ésta como una ciencia autónoma dentro de las matemáticas, al desligarla de la teoría de ecuaciones. Esta labor fue iniciada en la escuela inglesa del siglo XIX y con ello se sentaban las bases de lo que hoy conocemos como **álgebra moderna**.

2. EL NOMBRE

El uso de la palabra **álgebra** para designar una de las ramas de las matemáticas tiene su origen en el libro *Hisãb al-jabr w'al-muqãbalah* del matemático árabe Muhammed ibn Musa, al-Khwarizmi[4] (al-Juarismi). Esta obra data de alrededor del año 825 y una traducción libre del título podría ser *La solución de ecuaciones por medio de restitución y reducción*, aunque el mismo al-Juarismi menciona en el prólogo de su libro que es "… *un corto trabajo sobre [cómo] Calcular por medio de [las reglas de] Completación y Reducción, confinándose a lo que es lo más fácil y de más utilidad en aritmética, tal como los hombres constantemente requieren en casos de herencias, legados, reparticiones*, …".

Otro trabajo significativo de al-Juarismi versa sobre los números indo-arábigos en el cual se describe el sistema hindú de numeración posicional basado en los diez símbolos 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9 y 0. También se describen los métodos del cálculo aritmético con este sistema, así como un método para extraer la raíces cuadradas. De esta obra sólo se ha conservado la versión latina que tiene por título *Algoritmi de numero Indorum* (al-Juarismi sobre el Arte de Numeración Hindú); es claro que de esta obra se derivaron las palabra *guarismo* y *algoritmo*, que tienen significados precisos en la matemáticas. Aparte del anterior, hay otros libros de al-Juarismi sobre astronomía y geografía, pero no nos ocuparemos de ellos en este trabajo, sin embargo, la influencia que este matemático árabe tuvo sobre sus continuadores nunca podrá ser lo suficientemente valorada y es justo llamarle el *Padre del Algebra*, algo en lo que están de acuerdo varios autores (por ejemplo [4, p. 230] y [12, p. 21]). Para reforzar lo dicho, citamos un pasaje tomado de [12, p. 33]: "*La ciencia matemática en Europa fue más vitalmente influenciada por Mohammed ibn Musa que por cualquier otro escritor desde los tiempos de los griegos hasta Regiomontanus (1436-1476). A través de su aritmética, con la presentación del arte hindú de numeración, revolucionó los procesos comunes de calcular y a través de su álgebra puso los fundamenteos para el análisis moderno*".

Literalmente, la palabras *al-jabr* y *al-muqãbalah* significan *restauración* y *oposición*, respectivamente, por lo que en este contexto hacen referencia a resolver una ecuación

[4] Mohammed, hijo de Moisés de la aldea de Khwarezm.

agregando o quitando las mismas cantidades en cada lado de una ecuación, lo cual restaura el balance de la misma (esto es *al-jabr*), y se simplifica la ecuación por medio de la cancelación de los términos opuestos (por eso la palabra oposición en el título: *al-muqãbalah*). Un ejemplo muy sencillo del uso de estas palabras es el siguiente: Si consideramos la ecuación

$$7x + 2 = 5x + 10,$$

entonces restauramos el balance de la misma como sigue (hacemos *al-jabr*):

$$7x - 5x + 2 - 2 = 5x + 10 - 5x - 2\,,$$

y cancelando los opuestos (*al-muqãbala*) se obtiene

$$2x = 8\,,$$

por lo que la solución final es $x = 4$.

En el **al-jabr** de al-Juarismi se presenta un estudio exhaustivo y sistemático de los seis diferentes tipos de ecuaciones lineales y cuadráticas, clasificadas de la siguiente forma: (a) cuadrados iguales a raíces (v.g. $\frac{1}{3}x^2 = 4x$), (b) cuadrados iguales a números ($5x^2 = 80$), (c) raíces iguales a números ($4x = 20$), (d) cuadrados y raíces iguales a números ($x^2 + 10x = 39$), (e) cuadrados y números iguales a raíces ($x^2 + 21 = 10x$) y (f) raíces y números iguales a cuadrados ($x^2 = 3x + 4$). Los ejemplos se tomaron de este libro y los casos se analizan en el orden aquí expuesto.

Todas estas ecuaciones se consideraban distintas pues, como ya hemos mencionado, en ese tiempo todavía no se introducían los números negativos, razón por la cual era necesario separar los diferentes casos. Abundaremos más sobre esto en las siguientes secciones.

Una observación importante y que es necesario recalcar es que al-Juarismi no sólo da las soluciones a los problemas que plantea sino que va mucho más allá, pues como él mismo lo explica en su libro: *Hasta aquí hemos dicho bastante sobre los cálculos numéricos en lo que respecta a los seis tipos de ecuaciones. Ahora, sin embargo, es necesario que demostremos geométricamente la verdad de los mismos problemas que hemos explicado con números* [4, p. 230] Esta preocupación por demostrar la validez de los métodos empleados nos revela una clara influencia griega que está presente en toda la matemática árabe. Podemos decir que ésta se caracteriza por un espíritu ecléctico pues aprovecharon lo mejor de los babilonios, los hindúes y los griegos, lo cual se refleja en el álgebra de al-Juarismi.

La primera traducción al latín del **al-jabr** fue realizada por Robert de Chester en 1145 y llevaba por título *Liber algebrae et almucabala*. Después de esta aparecieron otras traducciones al latín, tales como *Ludus algebrae almucgrabalaeque*, *Gleba mutabilia*, y traducciones a otros idiomas con títulos como *Algiebar and almachabel* y *Gebra und Almuthabola*. Sin embargo, en los tratados algebraicos que van apareciendo a lo largo del siglo XVI, la palabra *muqãbalah* se elimina de los títulos de estos y aparecen obras como *Artis Magnae, sive de Regulis Algebraicis* (Gerónimo Cardano, 1545), *Algebræ compendiosa facilisque descriptio, qua depromuntur magna Arithmetices miracula* (John Scheubelius, 1552), *De oculta parte numerorum quam Algebram vocant* (Pelle-tiers, 1558) y *Libro de Algebra y Arithmetica y Geometria* (Pedro Núñez, 1567). Es claro entonces que estos usos de la palabra *al-jabr* dieron origen al nombre que ahora usamos. De hecho, una traducción inglesa del **al-jabr** hecha por Fredreric Rosen se publica simplemente como *The Algebra of Mohammed ben Musa,* y aparece en Londres en el año 1831.

La palabra árabe usada por al-Juarismi y otros matemáticos árabes posteriores a éste para referirse a la incógnita en una ecuación es *shaî*, que significa cosa (cualquier cosa, alguna cosa, algo), y que en un problema algebraico podríamos usar como sigue: el cuadrado de la *cosa* más seis veces la *cosa* suman siete, lo cual corresponde a la ecuación $x^2 + 6x = 7$. *Res* es la palabra que se usa para *cosa* en las primeras traducciones latinas del **al-jabr** y que traducen al italiano como *cosa*, razón esta por la que algunos escritores italianos llaman al álgebra la *Regola de la Cosa*[5].

Por otra parte, ya desde 1494 algunos autores usan los nombres *Arte magiore*, *Ars Mayor* o *Artis Magnae* para referirse al álgebra, en contraste con el *ars minor*, nombre muy usado para hacer referencia a la aritmética. Por ejemplo, Girolamo Cardano publica en 1545 su libro *Artis Magnae, sive de Regulis Algebraicis,* esto es *El Arte Magno o las Reglas del Algebra*. También es importante mencionar que el primer tratado de matemáticas publicado en el Continente Americano fue el *Sumario Compendioso*[6] de Juan Díez, aparecido en la Ciudad de México en el año de 1556; al final de esta obra encontramos siete páginas bajo el título *Notables Quistiones. Quistiones del Arte Mayor Tocantes al Algebra* [18]. Aquí se resuelven diez problemas algebraicos que involucran la solución de ecuaciones cuadráticas y cúbicas principalmente.

Un dato curioso del uso de la palabra álgebra es que la podemos encontrar en El Quijote [5, p. 358, (II, Cap. XV)]: *"…En esto fueron razonando los dos, hasta que llegaron a un pueblo donde fue ventura hallar un* ***algebrista*** *con quien se curó el Sansón desgraciado…*" Esto se explica fácilmente si pensamos en que *al-jabr* significa restaurar, pues los Moros (musulmanes del norte de África), llevaron la palabra a España con ese significado y la palabra *algebrista* era usada para nombrar al restaurador de huesos, es decir, a aquel que componía huesos rotos. Esta costumbre siguió en uso mucho tiempo después de la expulsión de los moros de España en 1492, y había incluso algunas barberías donde se podían leer las palabras "Algebrista y Sangrador".

En el siglo XVI hubo intentos para rechazar la palabra álgebra por parte de algunos académicos europeos (Francois Viète, por ejemplo), pues no tenía significado alguno en las lenguas de Europa y propusieron términos como *análisis* y *logística* para nombrar al arte mayor. Es por esta razón que durante mucho tiempo, todo lo que no fuera geometría era llamado análisis. Sin embargo, con el devenir del tiempo y con los desarrollos que se dieron en la Inglaterra del siglo XIX, los cuales vinieron a dar forma al álgebra simbólica, la palabra álgebra se usó para nombrar a una rama enteramente autónoma dentro de las matemáticas, de la cual nos ocuparemos en este escrito.

---

[5] La regla de la cosa.

[6] El título completo es Sumario Compendioso de las Cuentas de Plata y Oro que en los Reinos del Perú son necesarias a los mercaderes y todo género de tratantes. Con algunas reglas tocantes a la Aritmética.

3. EL ALGEBRA EN EGIPTO Y MESOPOTAMIA

Las mayores fuentes históricas que se han conservado sobre las matemáticas en Egipto son el papiro de Rhind y el papiro de Moscú. El primero de estos también se conoce como papiro de Ahmes (Ahmose), quien lo copió alrededor del año 1700 a. C. de un prototipo que puede situarse entre 2000 y 1800 a. C.

En este documento encontramos un estudio sistemático de fracciones unitarias, esto es, de la forma *1/n*, pues trataban de escribir cualquier otra fracción en términos de éstas; por ejemplo, 3/5 lo expresaban como 1/3+1/5+1/15. El papiro comienza con una tabla para expresar las fracciones de la forma *2/n* como una suma de fracciones unitarias para valores impares del denominador desde 5 a 101, y en este estudio podemos apreciar una gran destreza en el manejo de este tipo de fracciones.

El papiro de Ahmes enuncia y da la solución de 87 problemas que involucran cuestiones de la vida cotidiana tales como la repartición de pan y cerveza, cálculo de áreas de terrenos con varias formas geométricas y cálculo de volúmenes, e incluso, es posible encontrar rudimentos de trigonometría en algunos de ellos. Sin embargo, hay varios problemas que no tratan con objetos específicos o cosas concretas y los cuales podemos catalogar del tipo algebraico pues en la manera en que están escritos son equivalentes a resolver ecuaciones lineales del tipo $x + ax = b$, $x + ax + bx = c$ y en estos problemas denotaban la incógnita con un símbolo especial al que hacían referencia como *aha*, que significa *montón*. Por ejemplo, en el problema 24 se pide *el valor del montón si montón y una séptima parte de montón hacen* 19 ($x + \frac{1}{7}x = 19$) y la respuesta dada por Ahmes es $16 + \frac{1}{2} + \frac{1}{8}$.

Mucho tiempo después, pero todavía antes de la edad de oro de la matemática griega, encontramos en Egipto los primeros problemas que involucran ecuaciones cuadráticas: "*Otro ejemplo de la distribución de una área dada, en cuadrados. Si se te dice que distribuyas 100 ells cuadrados [ell: unidad de área] sobre dos cuadrados de tal modo que el lado de uno sea* $\frac{3}{4}$ *del lado del otro: por favor, dame cada una de las incógnitas*". En nuestra notación algebraica, este problema es equivalente a resolver el sistema de ecuaciones

$$x^2 + y^2 = 100$$
$$y = \tfrac{3}{4}x.$$

La solución se da de la siguiente manera: se supone que que el lado de un cuadrado es 1 y el lado del otro es $\frac{3}{4}$. La suma de las áreas es entonces $\frac{25}{16}$, siendo $\frac{5}{4}$ una raíz de esta. Como la raíz de 100 es 10, se tiene que 10 es al lado requerido como $\frac{5}{4}$ es a 1 ($\frac{10}{x} = \frac{5}{4}$) por lo que un cuadrado es de lado 8 y el otro tiene lado 6.

En general, la matemática egipcia siempre estuvo ligada a problemas prácticos y los egipcios no fueron capaces de reconocerla como una ciencia autónoma; de hecho, lo que nos muestran los papiros de Ahmes y de Moscú es que la matemática en Egipto permaneció prácticamente en un mismo nivel durante varios milenios y tampoco desarrollaron un sistema de numeración eficiente que hubiese llevado sus matemáticas por otros senderos más productivos.

Un desarrollo significativo de la matemática en la antiguedad se llevó a cabo en la fértil y siempre codiciada región situada entre los ríos Tigris y Éufrates: La Mesopotamia. Es mucho lo que podemos comentar de las matemáticas desarrolladas por algunos de los pueblos que habitaron esta región pues se han conservado bastantes registros que nos permiten darnos una idea de sus logros matemáticos. Entre estos podemos mencionar el uso de un sistema de numeración posicional en base 60, el cual manejaban con mucha destreza y que fué muy importante para que sus matemáticas lograran un estado muy superior a las egipcias.

El sistema de escritura que desarrollaron era de tipo cuneiforme pues escribían con estiletes, que dejaban marcas en forma de cuña, sobre tablillas de barro que luego se cocían al fuego y esto hizo que perduraran hasta nuestros tiempos. La forma de escribir sus números correspondería a expresiones de la forma

$$\sum_{i=0}^{\infty} a_i \cdot 60^i + \sum_{j=1}^{\infty} \frac{b_j}{60^j},$$

donde $a_i, b_j \in \{0,1,2,\ldots,59\}$, y que nosotros escribiremos como

$$\ldots a_3, a_2, a_1, a_0; b_1, b_2, b_3, \ldots$$

Debemos señalar que su matemática también estaba orientada a resolver problemas cotidianos de cálculo de impuestos, cálculo de longitudes, áreas y volúmenes, etcétera. Sin embargo, a diferencia de las matemáticas egipcias, se tiene cierta conciencia de algunas reglas generales que hacen que sus métodos funcionen en los casos particulares a los que se aplican, aunque no logran dar ese paso de ir de lo particular a lo general que es lo que distingue al pensamiento abstracto de lo común.

En lo que respecta al álgebra babilónica[7], que era de tipo verbal al igual que la egipcia, se han encontrado muchos registros de alrededor del año 1600 a. C. que muestran que los problemas de ecuaciones lineales eran muy elementales para ellos y en cambio podían resolver problemas que involucraban ecuaciones cuadráticas y cúbicas usando fórmulas desarrolladas exprofeso. De estas tablillas es posible concluir que los babilonios podían resolver ecuaciones cuadráticas con un método que es, en esencia, el que nosotros aprendemos en la secundaria: el de la fórmula general. Este método se basa en expresar una ecuación cuadrática en su **forma normal** y, seguidamente, aplicar un método para resolver esta forma normal que podemos describir como: *Encontrar dos números si se conoce su suma (o su diferencia) y su producto*.

Notemos que en nuestra moderna notación algebraica, podemos escribir la forma normal como sigue: *Dados dos números* s *y* p *que cumplen* $x + y = s$ *y* $xy = p$, *encontrar los valores de x e y.*

El método que los babilonios usaban para resolver este problema consistía de los siguientes pasos: (1) Tomar la mitad de la suma [$\frac{s}{2}$]; (2) Elevar al cuadrado el resultado obtenido [$(\frac{s}{2})^2$]; (3) De lo anterior, restar el producto [$(\frac{s}{2})^2 - p$]; (4) Tomar la raíz cuadrada de lo

7 No es del todo correcto llamarle así pues Babilonia no fue siempre el centro hegemónico de las culturas que florecieron en la Mesopotamia; sin embargo seguimos la costumbre impuesta por varios autores.

que resulta[$\sqrt{(\frac{s}{2})^2 - p}$]; (5) Sumar al resultado la mitad de la suma [$x = \sqrt{(\frac{s}{2})^2 - p} + \frac{s}{2}$]. Este es uno de los números buscados; el otro es la suma menos este último [$y = s - x$].

Veamos que esto es en realidad equivalente a resolver una ecuación cuadrática. En efecto, multiplicando la ecuación $s = x + y$ por x se obtiene

$$sx = x^2 + yx,$$

y tomando en cuenta que $p=xy$ obtenemos

$$x^2 + p = sx, \tag{3.1}$$

o equivalentemente

$$x^2 - sx + p = 0. \tag{3.2}$$

Esto significa que x es solución de esta última ecuación y, por simetría, y también lo es.

Recíprocamente, si consideramos la ecuación cuadrática

$$ax^2 + bx + c = 0 \tag{3.3}$$

donde a, b, c son números que por ahora suponemos racionales, y $a \neq 0$, entonces la solución de esta ecuación se puede ver como la solución de un problema en forma normal ya que podemos escribirla como

$$x^2 + \frac{b}{a}x + \frac{c}{a} = 0,$$

la cual es de la forma (3.2). En consecuencia, resolver esta última ecuación es equivalente a encontrar dos números cuya suma sea $-\frac{b}{a}$ y su producto $\frac{c}{a}$. Es decir, comparando con (3.2) se tiene

$$s = -\frac{b}{a} \quad \text{y} \quad p = \frac{c}{a}. \tag{3.4}$$

Por otra parte, notemos que los pasos (1) a (5) que los babilonios realizaban para resolver la forma normal, en notación simbólica nos llevan a las soluciones

$$x = \frac{s}{2} + \sqrt{(\tfrac{s}{2})^2 - p} \quad \text{y} \quad y = \frac{s}{2} - \sqrt{(\tfrac{s}{2})^2 - p}.$$

Estas dos solucione las podemos podemos expresar como

$$x, y = \frac{s \pm \sqrt{s^2 - 4p}}{2},$$

y sustitutyendo los valores (3.3) y (3.4) para s y p, obtenemos la conocida *fórmula general* para obtener las raíces de una ecuación de segundo grado:

$$x, y = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}. \tag{3.5}$$

Esto nos dice que, en esencia, esta fórmula ya era conocida desde hace más de 3700 años, hecho que quizás debiera enfatizarse en los cursos de álgebra de secundaria o preparatoria.

Si ahora se nos pide encontrar dos números (digamos x y y) dada su diferencia $(d = x - y)$ y su producto ($p = xy$), entonces, por un procedimiento similar al anterior, obtenemos una ecuación de la forma

$$x^2 = dx + p,$$

que resolvemos en forma análoga a la anterior, auque en el paso (3) sumamos el producto a la mitad de la diferencia al cuadrado: $(\frac{d}{2})^2 + p$, y se obtienen las soluciones

$$x = \tfrac{d}{2} + \sqrt{(\tfrac{d}{2})^2 + p} \quad \text{y} \quad y = -\tfrac{d}{2} + \sqrt{(\tfrac{d}{2}) + p},$$

que también son casos particulares de la fórmula general (3.5).

Para darnos una idea de la destreza de los matemáticos babilonios para calcular y resolver ecuaciones cuadráticas presentamos el siguiente ejemplo encontrado en una tablilla del período Seleúcida (Aprox. de 312 a 64 a. C.) en el que se pide *encontrar un número tal que sumado con su recíproco se obtiene un número dado*.

Para resolver este problema, notemos que si x representa el número a encontrar y c es el número dado, entonces se tienen las ecuaciones

$$x + \tfrac{1}{x} = c \quad \text{y} \quad x \cdot \tfrac{1}{x} = 1,$$

que nos remiten a encontrar dos números dada su suma y su producto, donde uno de los números es x y el otro es $y = \frac{1}{x}$, es decir, este es un problema que se traduce a la forma normal.

En el caso que nos ocupa, el valor que se da para c es $c = 2;0,0,33,20$, es decir, $c = 2 + \frac{0}{60} + \frac{0}{60^2} + \frac{33}{60^3} + \frac{20}{60^4}$, pues recordemos que usaban un sistema posicional de numeración en base 60. El texto procede conforme a los pasos (1)-(5) que se presentaron arriba, y se tiene (1) $\frac{c}{2} = 1;0,0,16,40$; (2) $(\frac{c}{2})^2 = 1;0,0,33,20,4,37,46,40$; (3) $\sqrt{(\frac{c}{2})^2 - 1} = \sqrt{0;0,0,33,20,4,37,46,40} = 0;0,44,43,20$ (se comprueba en el texto lo correcto de este cálculo al elevar este número al cuadrado); (4) $x = \sqrt{(\frac{c}{2})^2 - 1} + \frac{c}{2} =$ $0;0,44,43,20 + 1;0,0,16,40 = 1;0,45$, y el recíproco es $\frac{1}{x} = c - x = 2;0,0,33,20 - 1;0,45$ $= 0;59,15,33,20$.

Las ecuaciones cuadráticas en las que aparecen los tres términos, como en (3.3), se clasificaban, al menos desde los tiempos de al-Juarismi, en uno de los siguientes tres tipos: (a) $x^2 + px = q$, (b) $x^2 = px + q$, (c) $x^2 + q = px$, y de los cuales vimos ejemplos en la Sección 2 cuando se comentó sobre el **al-jabr**. Esta clasificación perduró durante toda la Edad Media y la ecuación cuadrática general de la forma (3.3) sólo se introdujo con la notación desarrollada al final del siglo XVI. Sin embargo, es posible encontrar estos tres tipos de ecuaciones en los textos babilonios, por lo que su familiaridad con ellas queda fuera de toda duda.

Con respecto a las ecuaciones cúbicas, se tienen muchos ejemplos particulares que equivalen a resolver cúbicas puras del tipo $x^3 = a$, como es el caso de la ecuación $x^3 = 0;7,30$, de la cual se da la solución $x = 0;30$ sin mayor explicación, pues se tenían tablas de cubos y de raíces cúbicas, elaboradas exprofeso. Las cúbicas mixtas de la forma $x^3 + x^2 = a$ se resolvían de forma análoga, consultando las tablas disponibles en las que aparecían los valores de la suma $n^3 + n^2$ para valores enteros de n de 1 hasta 30; así por ejemplo, con la ayuda de tales tablas podía leerse inmediatamente que la solución de la ecuación $x^3 + x^2 = 4{,}12$ es $x = 6$.

Para los casos un poco más generales de ecuaciones cúbicas tales como $144x^3 + 12x^2 = 21$, los babilonios usaban su método de sustitución: multiplicando por 12 ambos miembros y haciendo $y = 12x$, la ecuación se convierte en $y^3 + y^2 = 4{,}12$ de donde resulta $y = 6$, luego, $x = ½$ o bien $x = 0;30$.

Las cúbicas de la forma $ax^3 + bx^2 = c$ se pueden reducir a la forma canónica multiplicando ambos miembros por a^2/b^3 para obtener $(ax/b)^3 + (ax/b)^2 = ca^2/b^3$, que ya es una cúbica de la forma estándar en la incógnita $z = ax/b$, y consultando las tablas para obtener el valor de esta incógnita, se puede determinar el valor de x.

Por otra parte, no se tienen evidencias de que los babilonios hayan sido capaces de reducir la cúbica general $ax^3 + bx^2 + cx = d$ a su forma canónica. Sin embargo, debemos hacer notar que la resolución de ecuaciones cuadráticas y cúbicas en Mesopotamia constituyó un logro notable que hay que admirar, no tanto por el alto nivel de habilidad técnica puesta en juego como por el nivel de madurez y flexibilidad de los conceptos algebraicos que intervinieron en el proceso. El álgebra babilónica alcanzó un nivel de abstracción tan extraordinario que las ecuaciones $ax^4 + bx^2 = c$ y $ax^8 + bx^4 = c$ fueron consideradas correctamente como simples ecuaciones cuadráticas disfrazadas, es decir, como ecuaciones cuadráticas en x^2 y x^4 respectivamente.

4. EL ALGEBRA EN GRECIA

Es mucho lo que las matemáticas deben a los antiguos griegos. En general, la ciencia tal y como la conocemos actualmente, tiene su origen en la Grecia clásica y mucho de su legado cultural ha tenido un impacto profundo en la civilización occidental. "*Todos los hombres, por naturaleza, desean conocer*" nos dice Aristóteles, y quizá estas palabras reflejen mucho el espíritu de aventura griego. Ese deseo por conocer los llevó a viajar a Egipto y a Babilonia, en donde aprendieron mucho de la ciencia de estas civilizaciones, la cual desarrollaron hasta llegar a crear sus propias ciencias "*...como cosas vivientes, basadas en principios primarios y firmes, con una capacidad de un desarrollo infinito.*" [8]. En particular, las matemáticas no escaparon a esa inventiva genial de los griegos, pues "*… de todas las manifestaciones del genio griego, ninguna es más impresionante ni más imponente que la que es revelada por la historia de la matemática griega*" [8].

Por otra parte, supieron reconocer su deuda con las dos grandes civilizaciones que les precedieron y "*todo lo que nosotros los griegos recibimos lo mejoramos y perfeccionamos*", como nos dice Platón. Pero en realidad hicieron mucho más que eso pues supieron reconocer en el uso de la razón una poderosa herramienta con la que podían ser capaces de entender la naturaleza y, más aún, tenían el convencimiento de que ésta podía ser explicada en términos matemáticos. El dicho pitagórico de que "*Todo es número*" es una muestra clara de lo que hemos dicho.

Además, lograron tener éxito en donde sus predecesores habían fallado pues supieron dar a la matemática el rango de ciencia deductiva por excelencia. Esto fué posible gracias a que entendieron la gran diferencia que existe entre manejar ideas abstractas y generales en vez de las limitaciones que impone la cienca práctica, es decir, la que está orientada a resolver los problemas cotidianos. Así por ejemplo, supieron distinguir que una recta, un triángulo,un círculo, etcétera, son conceptos abstractos que surgen cuando se idealizan sus imperfectas realizaciones en la naturaleza o en las cosas que usamos en nuestra vida diaria.

Todo esto los llevaría al convencimiento de que sólo con el uso de la razón era posible conocer pues los sentidos siempre nos dan imágenes imperfectas del mundo que nos rodea. Aquí está la semilla que dió lugar a una genuina preocupación por la formalización, es decir, la justificación lógica de sus razonamientos. Esto los llevó a reconocer que en todo razonamiento es preciso partir de ciertos *principios básicos* y *evidentes por sí mismos*, y de los cuales se pueden deducir, con el uso de la razón, resultados más profundos. Tenían claro también que no era posible basar sus principios básicos en otros todavía más elementales o demostrarlos mediante otros principios pues "*… En cuanto a la demostración circular, su imposibilidad absoluta es patente, si es cierto que la demostración ha de partir siempre de cosas anteriores y más notorias. En efecto, es imposible que las mismas cosas sean respecto de unas mismas cosas anteriores y posteriores a la vez ... Los partidarios de la demostración circular, no sólo cometen la falta que aquí indicamos, sino que en el fondo se limitan a decir que una cosa existe si existe …*" [2, pp. 158-159].

Así, no puede haber demostraciones con un retroceso infinito ni con un proceso circular, y todo sistema deductivo debe partir de **axiomas**. Esto trae como consecuencia el surgimiento del **método axiomático**, del cual podemos decir que es la aportación más grande de los griegos a la ciencia en general y a las matemáticas en particular. Este método tuvo su mayor realización en los *Elementos* de Euclides y durante miles de años fueron el modelo a seguir en los desarrollos matemáticos.

En estas condiciones, es de llamar la atención que los más grandes logros matemáticos de los griegos fueron de tipo geométrico y el punto de vista pitagórico de que todo podía ser explicado en términos de los números naturales o sus razones (*arithmos*), no fue suficiente para paliar el dominio avasallador de la geometría. No sabemos a ciencia cierta el por qué de esa preferencia de los matemáticos griegos por la geometría, sin embargo, sabemos que el descubrimiento de los números inconmensurables, esto es, aquellos números que no es posible expresarlos como razones de enteros positivos, fué un suceso que destrozó por completo las bases de la fe pitagórica en los números. Esto posiblemente llevó a los matemáticos griegos a replantearse el papel de estos, en los cuales ya no podían confiar ciegamente y, en consecuencia, esto los obligó a introducir grandes cambios en sus matemáticas.

Como resultado, el álgebra babilónica, que los pitagóricos conocían y manejaban, debía ajustarse a la geometría. Así, la forma normal de los babilonios, el encontrar dos números dada su suma (o diferencia) y su producto, debía reinterpretarse geométricamente. De esta manera, el problema de encontrar los números x y y que cumplen $x+y=s$ y $xy=p$, para s y p dados, se interpretaba como sigue: Construir un rectángulo sobre un segmento de longitud s, con una anchura x, de tal manera que el área de este rectángulo (sx), sea mayor que el área p en un cuadrado de área x^2, esto es, $sx = p + x^2$ (ver ecuación (3.1)).

En este nuevo esquema, ya no era posible sumar longitudes con áreas ni áreas con volúmenes, etcétera. Por ejemplo, una ecuación de la forma $ax = bc$ debía interpretarse como una igualdad entre las áreas ax y bc, y no como una proporción, es decir, una igualdad entre las razones $\frac{a}{b}$ y $\frac{c}{x}$. El efecto que estos cambios produjeron en la matemática griega fué muy negativo para el álgebra pues canceló toda posibilidad de desarrollo independiente para ésta; además, también eliminó todo intento encaminado a crear una notación simbólica que les permitiera a los calculistas (*aritméticos*) abreviar sus fórmulas y métodos de cálculo.

Esta álgebra de tipo geométrico, a la que podríamos llamar *álgebra geométrica*, fue la que prevaleció en la matemática griega y la que perduraría durante muchos siglos por venir. Sin embargo, hay que destacar que las propiedades de las operaciones de suma y multiplicación que son propias del álgebra, tales como la asociatividad de la suma o la propiedad distributiva $a(b+c) = ab + ac$, resultaban obvias en esta álgebra geométrica. Asimismo, identidades como $(a+b)^2 = a^2 + 2ab + b^2$ y $a^2 - b^2 = (a+b)(a-b)$ se demuestran fácilmente en este contexto. Incluso la ecuación $x^2 = ab$ es fácil de resolver. De hecho, todas estas fórmulas se demuestran en el segundo libro de los *Elementos*, pero siempre en términos geométricos. Además, esto hace muy difícil el manejo de ecuaciones de grado mayor a dos, por lo que raramente se tratan ecuaciones cúbicas o bicuadráticas.

El libro quinto de los Elementos ha sido, a lo largo de la historia, uno de los más admirados de entre los trece que componen esta obra. En el se trata la *teoría de las magnitudes*, de la cual Bourbaki dice que es la *creación más original de la matemática griega* [3, p. 75]. Mucho del material de este libro es atribuido a Eudoxo pues su teoría de las proporciones se aborda en el mismo y, en cierta manera, esta fue una respuesta al problema de la inconmensurabilidad pues desde que se descubrieron las proporciones no conmensurables, los griegos trataron de eliminar en lo posible el uso de las proporciones. De esta manera, Eudoxo vino a establecer las bases para una teoría de la proporción que era independiente de la conmensurabilidad.

Desde el punto de vista algebraico este libro es muy importante pues se prueban algunas propiedades para magnitudes que serían lo análogo a las propiedades distributivas $m(a+b) = ma + mb$ y $(a+b)n = an + bn$. Incluso se prueba que el producto de dos razones es independiente del orden en que se realice la operación, es decir, esta multiplicación es conmutativa.

Arquímedes de Siracusa fue sin duda uno de los más grandes matemáticos griegos. Su genio se deja ver a través de sus muchos descubrimientos en diversas áreas tales como la mecánica, la hidrostática, la astronomía y, por supuesto, en las matemáticas. Sus aportaciones a esta ciencia fueron tan importantes que ocuparíamos volúmenes enteros analizando su obra. Sin embargo, lo que nos interesa mencionar en esta breve exposición del álgebra en la antigua Grecia con respecto al trabajo *geométrico-algebraico* de

Arquímedes, es un problema que aparece en su libro *Sobre la Esfera y el Cilindro* (ver [4, p. 132]) y es el siguiente: *¿Cómo cortar una esfera por medio de un plano de tal manera que la razón de los volúmenes de los dos segmentos esféricos sea igual a una razón dada* $\frac{a}{b}$ *?* Este problema es analizado por Arquímedes con métodos geométricos, por supuesto, y logra dar algunos resultados importantes. En efecto, el problema es equivalente a resolver una ecuación cúbica de la forma

$$\frac{4r^2}{x^2} = \frac{(3r-x)(a+b)}{ar},$$

y Arquímedes logra reducirlo a un problema que para nosotros equivaldría a encontrar la solución de una cúbica de la forma

$$x^2(c-x) = dp^2.$$

La manera en que Arquímedes llega a una solución es a través de encontrar la intersección de la parábola $cx^2 = p^2 y$ con la hipérbola $(c-x)y = cd$, y más aún, es capaz de dar condiciones sobre los coeficientes de la ecuación que le permiten determinar el número de soluciones reales. Después de Arquímedes, pasarían muchos siglos para que se retomara el análisis de ecuaciones cúbicas y es durante la hegemonía árabe, concretamente con Omar Khayam, cuando se estudian nuevamente este tipo de problemas.

Otro matemático griego que hace contribuciones importantes de tipo geométrico es Apolonio de Perga. Su trabajo sobre las Cónicas es significativo pues en el se ven los primeros atisbos de lo que después sería el uso de coordenadas en la geometría, que Descartes lleva a su plena realización.

Mención aparte debemos hacer de Diofanto de Alejandría, ya en plena decadencia de la matemática griega. En efecto, con Diofanto se vuelve a la tradición de los calculistas babilonios pues su libro, *Aritmética*, está más cerca de la matemática babilónica que de la gometría griega. En esta obra, Diofanto ya no se preocupa por darle una representación geométrica a los números y por lo tanto está en mucha más libertad para desarrollar algunas reglas de cálculo simbólico. De hecho, introduce símbolos para representar la incógnita de un problema y desarrolla una notación que usa para abreviar potencias de números, relaciones y operaciones.

De entre sus logros es posible destacar las *leyes de los signos*, pues una operación del tipo $(7-3)(5-2) = (4)(3) = 12$ lo lleva a establecer una identidad de la forma $(7-3)(5-2) = 7\cdot 5 - 7\cdot 2 - 3\cdot 5 + 3\cdot 2 = 35 - 14 - 15 + 6 = 12$, por lo que concluye que "*más por menos es menos*" y "*menos por menos es más*", y vemos en su trabajo el primer ejemplo de cálculo con números negativos. Además de esto, logró dar reglas que equivalen a las leyes de los exponentes que nosotros escribiríamos como $x^m x^n = x^{m+n}$, para valores pequeños de los exponentes, los cuales también podían ser negativos.

Los problemas que se tratan en la *Aritmética* nos muestran una gran habilidad matemática por parte de Diofanto. Por ejemplo, un problema es el siguiente: *Encontrar dos números tales que su suma sea* 20 *y la suma de sus cuadrados sea* 208. En nuestra notación moderna esto lo escribimos como el sistema de ecuaciones

$$x + y = 20,$$

$$x^2 + y^2 = 208.$$

En lugar de escribir el problema en esta forma, Diofanto lo expresa de manera equivalente como

$$(10+x)+(10-x)=20,$$

$$(10+x)^2+(10-x)^2=208.$$

De aquí se sigue que $x=2$, por lo que un número es 8 y el otro es 12.

Hay quienes llaman a Diofanto el padre del álgebra, aunque nosotros hemos reservado ese título para al-Juarismi. La razón de esto es que Diofanto todavía no tiene una concepción independiente del álgebra y su *Aritmética* no es, propiamente hablando, un texto de álgebra como sí lo es el **al-jabr**. Por otra parte, problemas que dan lugar a los tres tipos de ecuaciones cuadráticas (a) $ax^2+bx=c$, (b) $ax^2+c=bx$ y (c) $ax^2=bx+c$, se tratan en la *Aritmética*, pero sus soluciones se presentan como algo incidental, pues se requieren para la solución de otros problemas, y no como resultado de un análisis sistemático de estas ecuaciones. De hecho, cuando trata con problemas que lo llevan a resolver ecuaciones del tipo $ax^m=bx^n$, Diofanto habla de su intención de escribir un tratado sobre las ecuaciones cuadráticas, tarea que al parecer no llevó al cabo.

Es indudable la influencia de Diofanto en lo que ahora llamamos Teoría de Números y recordemos que el llamado Último Teorema de Fermat, que por tanto tiempo estuvo sin demostración, fue enunciado por éste en el margen de una de las páginas de su ejemplar de la *Aritmética* y que lo hicieron una de las conjeturas más famosas en las matemáticas hasta que finalmente fue demostrado por Andrew Wiles en 1995.

Con lo expuesto hasta aquí hemos dado un breve repaso al desarrollo del álgebra en las civilizaciones antiguas, a las que debemos reconocer sus logros matemáticos pues con ellos se dieron los primeros pasos que nos han llevado a esta gran aventura del intelecto humano que llamamos matemáticas. En la segunda parte de este trabajo tendremos oportunidad de ver otro tipo de logros que nos acercan más con la concepción moderna que se tiene de las matemáticas y que propiciaron, en particular, la evolución del álgebra abstracta.

REFERENCIAS

[1] A. D. Aleksandrov, A. N. Kolmogorov, M.A. Lavrent'ev (1977), *Mathematics, Its Content, Methods and Meaning*, Volume I, The M. I. T. Press, Boston.

[2] Aristóteles (1993), *Tratados de Lógica (El Organon)*, (Estudio Introductivo, Preámbulos a los Tratados y Notas al Texto por Francisco Larroyo), Editorial Porrúa, México, D. F.

[3] N. Bourbaki (1976), *Elementos de Historia de las Matemáticas*, Segunda Edición, Alianza Editorial, Madrid.

[4] C. B. Boyer (1991), *A History of Mathematics*, Second Edition, John Wiley and Sons, New York.

[5] Miguel de Cervantes Saavedra (1983), *Don Quijote de la Mancha*, Sexta Edición, Editores Mexicanos Unidos, S.A. México, D. F.

[6] G. Cardano (1993), *Ars Magna or the Rules of Algebra* (Translated by T. Richard Witmer), Dover Publications, Inc., New York, (MIT Press, 1968)
[7] J. Dieudonné (1965), *La Abstracción en Matemáticas y la Evolución del Algebra*, en *La Enseñanza de las Matemáticas*, Editorial Aguilar, Madrid, pp.42-57.
[8] H. M. Edwards (1984), *Galois Theory*, Springer, New York.
[9] Euclides (1956), *The Thirteen Books of The Elements* (Translated with Introduction and Commentary by Sir Thomas L. Heath), Vol. II, Second Edition, Dover Publications Inc., New York.
[10] T. L. Heath (1981), *A History of Greek Mathematics*, Volume II, Dover, New York.
[11] D. B. Johnson, T. A. Mowry (1995), *Mathematics, a Practical Odissey*, PWS Publishing Company, Boston.
[12] L. C. Karpinski (1915), *Robert of Chester's Latin Translation of the Algebra of Al-Khowarizmi*, The MacMillan Company, London.
[13] M. Kline (1972), *Mathematical Thought from Ancient to Modern Times*, Volume 2, Oxford University Press, New York.
[14] O. Neugebauer (1969), *The Exact Sciences in Antiquity*, Second Edition, Dover, New York (Brown University Press, 1957).
[15] J. Piaget et al. (1965), *La Enseñanza de las Matemáticas*, Aguilar, Madrid.
[16] F. Rosen (1831), *The Algebra of Mohammed ben Musa*, Farbury, Allen and Co., London.
[17] D. E. Smith (1958), *History of Mathematics*, Volume II, Dover, New York.
[18] D. E. Smith (1921), *The Sumario Compendioso of Brother Juan Diez*, Ginn and Company, Boston.
[19] The Mathematical Intelligencer, Vol. 9, No. 2, 1987.