115. La cosiddetta geometria non euclidea

di Felix Klein

[*Ùber die sogenannte Nicht-Euklidische Geometrie*]
Memoria presentata da A. Clebsch alla Società Reale delle Scienze di Gottinga, pubblicata nel Notiziario della suddetta Società numero 17 del 30 agosto 1871
Traduzione italiana a cura di Antonio Bernardo[1]

La discussione che segue si riferisce alla cosiddetta geometria non euclidea di Gauss, di Lobacevskij e di Bolyai, nonché alle osservazioni avanzate da Riemann e da Helmholtz sui fondamenti delle nostre rappresentazioni geometriche. La presente discussione, tuttavia, non deve essere impostata sulle speculazioni filosofiche, che hanno condotto ai lavori suddetti: il suo principale scopo è quello di esporre, limitatamente alla teoria delle parallele, in modo nuovo e chiaro i risultati matematici di quei lavori e quindi di offrire di essi una formulazione semplice e generale. Per raggiungere un tale scopo, sarà necessario passare attraverso la geometria proiettiva e dimostrare l'indipendenza di quest'ultima dalla teoria delle parallele. In realtà, seguendo il procedimento di Cayley, è possibile costruire una metrica proiettiva generale riferita a una qualsiasi superficie di secondo grado considerata come superficie fondamentale. Questa metrica proiettiva offre, a seconda del tipo di superficie di secondo grado usata, un modello per le diverse teorie delle parallele formulate nei lavori citati. Essa, comunque, non fornisce soltanto un modello di quelle teorie, ma ne rivela addirittura l'intrinseca struttura.

I. Le diverse teorie delle parallele

L'undicesimo assioma di Euclide[2] è, lo sappiamo, equivalente alla proposizione secondo cui la somma degli angoli interni di un triangolo è uguale a due retti. Legendre ha dimostrato[3] che la somma degli angoli interni di un triangolo non può essere maggiore di due retti; e ancora che, se in un triangolo la somma degli angoli è uguale a due retti, la stessa cosa deve valere per qualsiasi triangolo. Legendre, tuttavia, non è riuscito a dimostrare che la somma degli angoli interni di un triangolo non può essere minore di due retti.
Quest'ultima riflessione sembra aver costituito il punto di partenza delle ricerche di Gauss sull'argomento. Gauss riteneva impossibile dimostrare che la somma degli angoli interni di un triangolo sia uguale a due retti, pensava invece che si potesse costruire una geometria logicamente coerente nella

[1] Questa traduzione è stata pubblicata in F.Klein, *Il programma di Erlangen*, a cura di A. Bernardo, Editrice La Scuola, Brescia, 1998; viene riprodotta qui per concessione dell'editore.
[2] L'undicesimo assioma di Euclide viene normalmente citato come quinto postulato. La duplice definizione è dovuta al fatto che la prima edizione in lingua latina del 1482 eseguita sui testi arabi distingue gli assiomi dai postulati, cosa che non si verifica nell'edizione greca del 1533. Ne consegue che l'affermazione euclidea sulle rette parallele è il quinto postulato dell'edizione latina e l'undicesimo assioma di quella greca. Cfr. R. BONOLA, *La geometria non euclidea: esposizione storico-critica del suo sviluppo,* Bologna, Zanichelli, 1906, p. 16. NOTA DEL TRADUTTORE.
[3] Questa dimostrazione e quella di Lobacevskij sullo stesso argomento, postula la lunghezza infinita della retta. Se si lascia cadere questa ipotesi (cfr. il testo che segue), allora cadono anche le dimostrazioni, che invece dovrebbero valere anche per la geometria sulla superficie sferica. [1871] NOTA DELL'AUTORE.

quale la somma degli angoli di un triangolo è minore di due retti. Gauss chiamò questa geometria non euclidea[4]: si è occupato a lungo dell'argomento ma purtroppo, a parte alcuni cenni, non ha pubblicato nulla a riguardo. Nella geometria non euclidea di Gauss, è presente una certa costante[5] che caratterizza la metrica spaziale. Quando la suddetta costante ha un valore infinito, si costruisce l'usuale geometria euclidea. Quando, invece, la costante ha un valore finito, si ottiene una diversa geometria, per la quale valgono, a titolo d'esempio, le seguenti proposizioni: la somma degli angoli interni di un triangolo è minore di due retti e questa somma è tanto più piccola quanto più è grande la superficie del triangolo. Per un triangolo, i cui vertici siano infinitamente lontani, la somma degli angoli interni è nulla. Per un punto esterno a una retta, si possono tracciare due parallele, cioè due linee che tagliano la retta, dall'uno o dall'altro lato, in un punto infinitamente lontano. Le rette che passano per il punto, rimanendo tra le due parallele, non tagliano mai la retta data.
A questa stessa geometria non euclidea sono pervenuti Lobacevskij[6], professore di matematica nell'Università di Kazan, e, qualche anno dopo, il matematico ungherese J. Bolyai[7]; questi autori hanno trattato l'argomento in pubblicazioni specifiche. I loro lavori sono rimasti quasi ignorati, finché la corrispondenza tra Gauss e Schumacher, pubblicata nel 1862, non ha richiamato l'attenzione su di essi. Da quel momento, si è diffusa l'opinione che la teoria delle parallele sia stata finalmente chiarita, nel senso che è stata riconosciuta l'impossibilità di determinarla in modo univoco.
Una tale opinione ha subito, comunque, una sostanziale modifica, sia nel 1867, quando, dopo la morte di Riemann, è apparsa la sua lezione di abilitazione del 1854, *Sulle ipotesi che stanno a fondamento della geometria,* sia subito dopo, quando Helmholtz ha pubblicato, in questo stesso Notiziario (1868), le sue ricerche *Sui fatti che stanno a fondamento della geometria*[8].
Nello scritto di Riemann, è detto esplicitamente che l'illimitatezza dello spazio, sperimentabile empiricamente, non ne implica di necessità l'infinitezza. È in realtà possibile pensare, e ciò non contraddice la nostra intuizione che si riferisce sempre e solo a una parte finita dello spazio, che lo spazio sia finito e ritorni su se stesso: la geometria del nostro spazio diverrebbe allora la geometria di una varietà a tre dimensioni collocata su di una sfera a quattro dimensioni. Quest'idea, che si trova anche in Helmholtz, comporterebbe che la somma degli angoli interni di un triangolo (come l'usuale triangolo sferico) sia maggiore[9] di due retti e tanto maggiore quanto più grande è l'area del triangolo. La linea retta non avrebbe allora punti all'infinito e quindi non si potrebbe tracciare da un punto dato nessuna parallela a una data retta.
Una geometria fondata su affermazioni di un tale tipo si verrebbe a porre a fianco della geometria euclidea proprio come quella già menzionata di Gauss, di Lobacevskij e di Bolyai. Mentre, in quest'ultima, ogni singola retta possiede due punti [reali] all'infinito, nell'altra le rette non hanno punti [reali] all'infinito (ma solo due punti immaginari). Tra le due, come caso intermedio, si trova la geometria euclidea, nella quale la retta possiede due punti [reali] all'infinito ma coincidenti.

---

4 Cfr. SARTORIUS V. WALTERSHAUSEN, *Gaufi zum Gedàchtnis,* p. 81. Inoltre alcune lettere dello scambio epistolare di Gauss con Schumacher. [1871] NOTA DELL'AUTORE.
5 Nel 1831, in una lettera a Schumacher, Gauss indica una formula per calcolare la lunghezza della circonferenza nella geometria generale, cioè nella geometria che esclude l'assioma delle parallele. Nella formula compare un fattore costante che Gauss aveva lasciato indeterminato, poiché a suo avviso, doveva essere determinato da prove sperimentali. Gauss era convinto che bisognasse supporre questa costante di valore infinitamente grande. NOTA DEL TRADUTTORE.
6 In Kasanschen Boten 1829. - Schrìften der Università Kasan 1836-38. -Crelles Journal, V. 17, 1837 (Geometrie imaginaire). - Geometrische Untersuchun-gen zur Theorie der Parallellinien. Berlin 1840. Pangeometrie. Kasan 1855 (La Pangeometria si trova in traduzione italiana nel voi. 5 del «Giornale di Matematiche», 1867); Ges. Werke, voli. I, II. [1871] NOTA DELL'AUTORE.
7 In *un'Appendice* ai lavori di W. BOLYAI: *Tentamen juventutem...* Maros-Vasarhely, 1832. Una traduzione italiana della stessa nel voi. 6 del «Giornale di Matematiche», 1868. [1871] NOTA DELL'AUTORE.
8 Cfr. H. L. VON HELMHOLTZ, *Ùber die Thatsachen, die der Geometrie zum Grunde liegen,* «Nachrichten von der Kòniglichen Gesellschaft der Wissenschaf-ten zu Gòttingen», 1868, pp. 193-222. [H. VON HELMHOLTZ, *Opere,* ed. it. a cura di V. CAPPELLETTI, Torino, U.T.E.T., 1973, pp. 421-444]. NOTA DEL TRADUTTORE.
9 Le contrapposte dimostrazioni di Legendre e Lobacevskij presuppongono, come abbiamo già osservato, che lo spazio sia infinito. [1871] NOTA DELL'AUTORE.

Servendomi del linguaggio usuale, denoterò rispettivamente queste tre geometrie come *iperbolica, ellittica*[10] e *parabolica,* a seconda che i due punti all'infinito della retta siano reali, immaginari o [reali e] coincidenti.

II. Visualizzazione delle tre geometrie per mezzo della determinazione metrica generale di Cayley

L'esigenza di visualizzare le speculazioni molto astratte, che hanno condotto alla costruzione di tre distinte geometrie, ha sollecitato la ricerca di metriche in grado di rendere concepibili modelli delle suddette geome-trie e di dimostrare la coerenza interna di ciascuna di esse.
La geometria parabolica non necessita della suddetta visualizzazione, in quanto coincide con la geometria euclidea, che è per noi di uso corrente.
Per le geometrie ellittica e iperbolica sono stati creati modelli, che spiegano le caratteristiche di queste geometrie per mezzo di oggetti misurabili in senso euclideo. Questi modelli, comunque, rendono ragione solo della parte planimetrica delle geometrie in questione. Beltrami, al quale si deve la visualizzazione della geometria iperbolica[11], ha dimostrato che non è possibile qualcosa di analogo per lo spazio. La rappresentazione planimetrica della geometria ellittica è, com'è facile capire, la geometria su di una sfera[12], o più in generale, la geometria di una superficie a curvatura costante positiva. La geometria iperbolica viene invece interpretata per mezzo di una superficie a curvatura costante negativa. Quest'ultima interpretazione, purtroppo, non consente, così almeno sembra, un'immagine dell'intero piano: in quanto, la superficie a curvatura costante negativa è sempre limitata da una curva che ritorna su se stessa[13].
Io voglio, in primo luogo, costruire modelli capaci di dominare completamente, cioè sia nel piano sia nello spazio, le caratteristiche delle tre citate geometrie. Dimostrerò poi che questi modelli non sono semplici interpretazioni delle suddette geometrie, bensì un modo di evidenziarne l'interna struttura e quindi di renderle pienamente comprensibili.
I modelli in questione trattano il piano e lo spazio come oggetti misurabili ma si servono di una metrica diversa da quella usuale, precisamente di quella metrica che nella geometria proiettiva si presenta come una generalizzazione della metrica usuale. Questa metrica generale è stata costruita da Cayley[14], ma il punto di vista di Cayley è diverso da quello che presento in questo scritto. Cayley ha costruito la metrica generale per dimostrare che la geometria metrica (euclidea) può essere concepita come una parte speciale della geometria proiettiva. Cayley ha trattato soltanto il piano e ha dimostrato che nel piano proiettivo si può individuare una metrica per mezzo di una qualsiasi conica, assunta come "assoluto". Se questa conica degenera in una coppia di punti immaginari, si ha una metrica del tipo di quella che applichiamo (nella geometria euclidea); in particolare si ottiene la metrica usuale, quando si fanno coincidere entrambi i punti fondamentali immaginari con due particolari punti del piano, precisamente i due punti ciclici.
Trasferirò la metrica generale di Cayley allo spazio ed esporrò il problema, diversamente da quel che ha fatto Cayley, dando maggiore risalto agli aspetti geometrici. Considero una qualsiasi superficie di secondo grado e la assumo come superficie "fondamentale". La retta che unisce due qualsiasi punti dello spazio interseca la superficie fondamentale in altri due punti. I quattro punti in questione formano

---

10 L'usuale [geometria] sferica sarà quindi indicata come un caso particolare di geometria "ellittica". [1871] NOTA DELL'AUTORE.

11 *Saggio di interpretazione della Geometria non-euclidea,* «Giornale di Matematiche» v. 6, 1868. *Scritti,* v. I, pp. 374-406. [1871] NOTA DELL'AUTORE.

12 In questo testo non è stata fatta una distinzione netta tra la geometria ellittica e la geometria sferica, come è stato fatto nella memoria *Ueber die sogenannte Nicht-Euklidische Geometrie,* «Mathematische Annalen», (4) 1871. [1921] NOTA DELL'AUTORE.

13 Ciò è stato infatti confermato da un successivo teorema di Hilbert. Cfr. D. HILBERT, *Grundlagen der Geometrie,* Edizione 2 e seguenti, appendice V. [1921] NOTA DELL'AUTORE.

14 Cfr. *Sixth Memoir upon Quantics,* «Phil. Trans.», V. 149 *[Coll. Papers,* v. II, pp. 583-592]. Confronta anche la traduzione di Fiedler delle Coniche di Sal-mon, 2 ed. (Lipsia 1860), o Fiedler: *Die Elemente der neueren Geometrie und der Algebra der binàren Formen* (Lipsia 1862). [1871] NOTA DELL'AUTORE.

un birapporto; *il logaritmo di questo birapporto, moltipllcato per una certa costante arbitraria*[15] *e, sarà per definizione la distanza tra i punti dati*[16]. Analogamente, quando si considerano due piani, è possibile metterli in relazione, per mezzo della retta in cui s'intersecano, con due piani tangenti alla superficie fondamentale. Questi ultimi due piani assieme ai due considerati formano un birapporto. *// logaritmo di questo birapporto, moltiplicato per una costante arbitraria c', lo indichiamo come angolo tra i due piani.*
Stando alle suddette definizioni, i punti della superficie fondamentale sono a distanza infinita da tutti gli altri punti: la superficie fondamentale è quindi il luogo dei punti all'infinito. Ugualmente, i piani tangenti alla superficie fondamentale sono piani che formano un angolo di ampiezza infinita con un qualsiasi altro piano. Tutti i punti della tangente alla superficie hanno distanza nulla tra di loro. Due piani, che si intersecano lungo una retta che è tangente alla superficie, formano tra di loro un angolo nullo. Una sfera è, allora, una superficie di secondo grado che tocca la superficie fondamentale lungo una curva piana.
Il centro della sfera è il polo del piano. Al posto dei movimenti dipendenti da sei parametri, che lasciano inalterata la metrica usuale, c'è ora un ciclo[17] di altrettante trasformazioni lineari. La superficie fondamentale, infatti, come ogni superficie di secondo grado, si trasforma in se stessa per mezzo di trasformazioni lineari dipendenti da sei parametri. Queste trasformazioni lineari si scindono in due schiere a sei parametri, a seconda che entrambi i sistemi di rette generataci della superficie siano interscambiabili oppure no. In questa sede, parlerò solo delle trasformazioni del secondo tipo. Tuttavia, anche le trasformazioni del primo tipo lasciano inalterate le distanze, poiché esse, come le altre, non alterano i birapporti; i logaritmi dei quali sono per definizione le distanze. Le trasformazioni lineari del primo tipo non corrispondono, comunque, ai movimenti dello spazio ma piuttosto a quelle trasformazioni che trasformano figure spaziali in figure congruenti disposte in modo simmetrico[18].
Da questa determinazione metrica generale si deduce, con un passaggio al limite, una geometria metrica analoga alla usuale geometria *parabolica:* ciò si verifica, quando la superficie fondamentale di secondo grado degenera in una conica immaginaria. Nel caso particolare in cui questa conica è il cerchio immaginario all'infinito, si ottiene esattamente l'usuale geometria metrica.
La determinazione metrica proiettiva generale produce inoltre, con una scelta appropriata della superficie fondamentale, una geometria metrica in grado di rappresentare sia la geometria *ellittica,* sia quella *iperbolica:* le suddette rappresentazioni sono proprio i modelli di geometria ellittica e iperbolica, di cui si è parlato in precedenza.
Si perviene a una geometria metrica corrispondente alla geometria *ellittica,* quando la superficie fondamen-tale è assunta come immaginaria. In questo caso, evidentemente, non esiste nessuna retta con punti reali all'infinito; di conseguenza, la retta si presenta come una curva chiusa di lunghezza finita. Otterremo, in par-ticolare, proprio le formule (trigonometriche) tipiche della geometria ellittica. Si tratta

---

15 Cayley definisce la distanza dei due punti con una formula, nella quale a questa costante viene dato un valore particolare: $\frac{2}{\pi}\sqrt{-1}$. Lo stesso vale per la costante C. [1871] NOTA DELL'AUTORE.

16 Klein intende dimostrare la possibilità di fondare la metrica sulla geometria proiettiva. Per stabilire la distanza tra due punti dello spazio, che possiamo chiamare A e B, cerca, sulla superficie fondamentale, altri due punti C e D in modo da ottenere il birapporto (AC:BC) : (AD:BD). Dato che il suddetto birapporto costituisce un invariante proiettivo, Klein dimostra che il logaritmo di esso esprime la distanza fra i due punti A e B e che la suddetta distanza può assumere valori diversi in funzione del tipo di superficie assunta come fondamentale. Estende poi il discorso del birapporto dei punti ai piani, per individuare attraverso il logaritmo di questo secondo birapporto la misura degli angoli. NOTA DEL TRADUTTORE.

17 Klein usa "ciclo" invece di "gruppo": quando ha scritto questo saggio è ancora convinto che non si possa usare la nozione di gruppo per un insieme infinito e continuo di elementi. NOTA DEL TRADUTTORE.

18 Klein esclude dalla propria trattazione le simmetrie. Queste trasformazioni, pur conservando le distanze, alterano la forma delle figure, allo stesso modo in cui uno specchio scambia il lato sinistro con il lato destro di un oggetto riflesso.
Nella geometria iperbolica, da un punto passano due parallele a una retta data, e ciascuna di esse incontra la retta data in un punto all'infinito che si trova sulla superficie fondamentale. Poiché nella geometria proiettiva tutte le rette si incontrano in un punto, ogni retta che è compresa tra le due parallele deve incontrare la retta data in un punto. Questo punto non può che trovarsi al di là della superficie fondamentale. NOTA DEL TRADUTTORE.

delle formule dell'usu-ale trigonometria sferica, nella quale entra in gioco la costante $\frac{c}{\sqrt{-1}}$ che dipende dal raggio della sfera[19].
Si ottiene, invece, una geometria corrispondente a quella *iperbolica,* quando si assume la superficie fondamentale come reale e non rigata, e quando si considerano solo i punti al suo interno. Una tale limitazione all'interno della superficie fondamentale è del tutto naturale. Se ci si trova infatti all'interno della superficie e se è possibile cambiare la propria posizione nello spazio solo in ragione di determinate trasformazioni lineari spaziali, precisamente quelle che per la metrica in questione interpretiamo come i movimenti nello spazio, allora non si potrà mai uscire dall'interno della superficie di secondo grado, perché quest'ultima, in ragione della metrica considerata, si trova all'infinito. Al di là della superficie fondamentale si troverebbe ancora una parte di spazio della cui presenza non si sa niente; ci s'immagina che essa esista solo perché, se due rette giacenti in un piano non si incontrano mai, esse dovrebbero incontrarsi nello spazio al di là della superficie[20]. Se invece ci si limita alle costruzioni all'interno della superficie e alla metrica a essa relativa, valgono le leggi della geometria iperbolica. Ogni retta, per esempio, ha due punti reali all'infinito, perché qualsiasi retta interna alla superficie taglia quest'ultima in due punti reali. Per un punto si possono condurre due parallele a una retta: le parallele sono quelle linee che collegano il punto in questione con i due punti in cui la retta data taglia la superficie fondamentale. È nulla la somma degli angoli interni di un triangolo con i vertici all'infinito, cioè di un triangolo i cui vertici si trovino sulla superficie fondamentale: infatti, due linee che si incontrano sulla superficie fondamentale (due parallele) formano un angolo nullo, e così di seguito. Infine, la costante c, per la quale deve essere moltiplicato il logaritmo del birapporto onde ottenere la distanza tra due punti, è la citata costante caratteristica propria della geometria iperbolica.

III. Indipendenza della geometria proiettiva dalla teoria delle parallele. fondamento delle tre geometrie metriche

In precedenza, ho individuato per le geometrie metriche ellittica e iperbolica adeguati modelli nella metrica generale di Cayley, assumendo la superficie fondamentale una volta come immaginaria e un'altra volta come reale e non rigata. Allo stesso modo, ho individuato un modello per la usuale geometria parabolica, nel caso in cui la superficie fondamentale degenera in una conica immaginaria. Questo modello diventa visualizzabile, diventa cioè un oggetto della geometria parabolica, quando si faccia coincidere la conica fondamentale con una particolare conica, il cerchio immaginario all'infinito. Analogamente, le geometrie metriche, che ho rispettivamente costruito come modelli delle geometrie ellittica e iperbolica, diventano proprio queste geometrie, se si fa coincidere la superficie fondamentale di queste geometrie con una particolare superficie di secondo grado, quella all'infinito.
Questa convinzione deriva dal fatto che la geometria proiettiva è indipendente dal problema delle parallele[21]. Infatti, per sviluppare la geometria proiettiva e dimostrarne la validità in un qualsiasi spazio assegnato e limitato, è sufficiente realizzare in questo spazio delle costruzioni, che non vanno al di fuori di esso e che riguardano solo le cosiddette relazioni di posizione. I bi-rapporti (unici elementi fissi della geometria proiettiva) non devono inoltre essere definiti attraverso relazioni di distanze, come di solito si fa, perché un tale modo di operare presuppone la conoscenza di una metrica. Nell'opera di von Staudt, *Contributi alla geometria di posizione*[22], sono date le indicazioni necessarie per definire il birapporto come un

[19] Per comodità si suppone c come una costante puramente immaginaria. Cfr. *Ueber die sogenannte Nicht-Euklidische Geometrie,* «Mathematische Annalen», (4) 1871, §5. [1871] NOTA DELL'AUTORE.
[20] Nella geometria iperbolica, da un punto passano due parallele a una retta data e ciascuna di esse incontra la retta data in un punto all'infinito che si trova sulla superficie fondamentale. Poiché nella geometria proiettiva tutte le rette si incontrano in un punto, ogni retta che è compresa tra le due parallele deve incontrare la retta data in un punto, ogni retta che è compresa tra le due parallele deve incontrare la retta data in un punto. Questo punto non può che trovarsi al di là della superficie fondamentale. NOTA DEL TRADUTTORE.
[21] Ciò si può verificare facilmente anche nel seguito. Infatti sulla base della geometria ellittica o iperbolica si può, così come è stato fatto per la geometria parabolica, costruire la geometria proiettiva. [1871] NOTA DELL'AUTORE.
[22] *Beitrage zu Geometrìe derLage,* 1856, § 27, Nr. 393. [1871] NOTA DELL'AUTORE.

numero puro[23]. Dal birapporto è possibile poi risalire alle coordinate omogenee di punto e di piano, le quali altro non sono che i valori relativi del suddetto birapporto, cosa dimostrata da von Staudt[24] e recentemente ripresa da Fiedler[25]. Rimane invece indeciso se sia possibile trovare i corrispondenti elementi spaziali per tutti i valori delle coordinate. Quando ciò non si verifica, niente impedisce di aggiungere allo spazio elementi reali impropri in modo tale che questi corrispondano ai valori delle coordinate in questione. È quanto accade nella geometria parabolica, quando parliamo del piano all'infinito. Per fondare la geometria iperbolica, invece, si dovrebbe aggiungere un intero pezzo di spazio. Al contrario, nella geometria ellittica non sarebbe necessario aggiungere elementi impropri.
Costruendo in questo modo la geometria proiettiva, vi si può introdurre la metrica generale di Cayley. Quest'ultima rimane inalterata, come ho detto poco fa, per trasformazioni lineari a sei parametri considerate come movimenti dello spazio.
Tratto ora i movimenti che di fatto si verificano nello spazio e la metrica alla quale danno origine. Si è visto che i movimenti a sei parametri sono anche trasformazioni lineari. Queste lasciano inalterata una superficie, la superficie dei punti all'infinito. E non ci sono, è facile dimostrarlo, altre superfici che si trasformano in se stesse per trasformazioni lineari a sei parametri, esclusa quella di secondo grado e le sue degenerazioni. I punti all'infinito formano pertanto una superficie di secondo grado e i movimenti dello spazio sono inclusi nel ciclo a sei parametri di trasformazioni lineari, che lasciano inalterata una superficie di secondo grado. Dopo quel che si è detto, risulta evidente che la metrica dei fatti[26] è una parte di quella generale proiettiva: per la metrica proiettiva ci si può servire di una qualsiasi superficie di secondo grado, mentre per quella fattuale se ne può assumere una soltanto.
Il tipo di superficie di secondo grado, che si trova a fondamento della metrica fattuale, può essere determinato in maniera più precisa, se si considera che un piano ritorna nella posizione iniziale, quando lo si fa ruotare intorno a un qualsiasi asse posto al finito. Il che equivale ad affermare che una retta posta al finito individua due piani tangenti immaginari sulla superficie fondamentale. Essendo questi due piani all'infinito (cioè piani che con tutti gli altri formano un angolo di ampiezza infinita), se fossero reali si troverebbero nel fascio di piani individuato dalla rotazione e non consentirebbero di fare ritornare un piano del fascio nella sua posizione iniziale dopo una rotazione effettuata sempre nella stessa direzione.
Esistono solo tre casi in cui questi piani sono immaginari o, il che è lo stesso, è immaginario il cono tangente alla superficie fondamentale, cono che parte da un punto dello spazio (accessibile a noi attraverso i movimenti):
1. *La superficie fondamentale è immaginaria.* In questo caso la geometria è ellittica.
2. *La superficie fondamentale è reale,* non rigata e ci racchiude. È l'ipotesi della geometria iperbolica.
3. *(Intermedio) La superficie fondamentale è degenerata in una curva immaginaria.* È l'ipotesi della usuale geometria parabolica.
Siamo così arrivati alle tre geometrie, che, come ho detto nel primo paragrafo, sono state costruite a partire da considerazioni del tutto diverse.

[23] Klein afferma di aver appreso queste notizie sull'opera di von Staudt da alcune conversazioni con il suo amico Stoltz e precisa che il riferimetno dato nella nota precedente è falso, anche se il riferimento all'opera di von Staudt è corretto. Cfr. F. KLEIN, *Vorbemerkungen zu den Arbeiten ùber di Grundlagen der Geometrie,* [Premesse ai lavori sui fondamenti della geometria], *Gesammelte mathema-tischeAbhandlungen, cit.,* I, pp. 241, 242. NOTA DEL TRADUTTORE.
[24] §29,Nr. 411. [1871] NOTA DELL'AUTORE.
[25] Vierteljahrsschrift der naturforsch. Gesellschaft in Zurich, XV. 2. (1871). [1871] NOTA DELL'AUTORE.
[26] È ipotizzabile che l'espressione *"thatsàchlich",* usata da Klein, sia un implicito riferimento all'autorità di Helmholtz, il quale aveva scritto un saggio dal titolo *Sui fatti che sono a fondamento della geometria*, nella quale aveva dimostrato che la geometria euclidea è l'unica compatibile con il 'fatto' che esistono corpi rigidi. NOTA DEL TRADUTTORE.